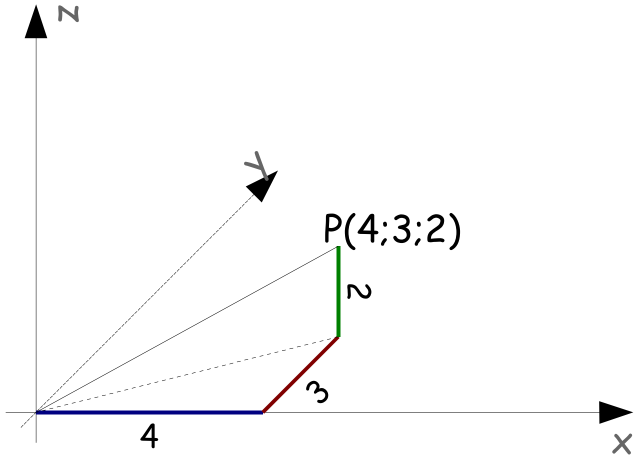
Grundlagen

Schrägbild 1

Punkte im Raum

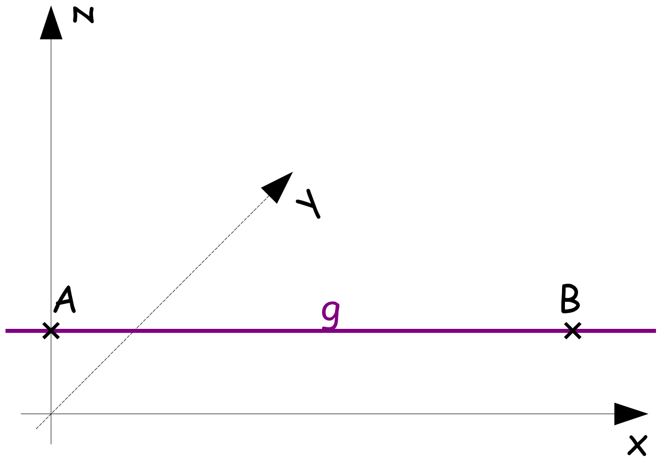


Ein Punkt ist im Raum durch drei Koordinaten (x,y,z) festgelegt.

Aufgabe

Versuche die Punkte A(0;0;0), B(1;1;1) und C(3;2;–2) in einem Schrägbild darzustellen.

Geraden im Raum



Eine Gerade ist im Raum durch zwei Punkte festgelegt.

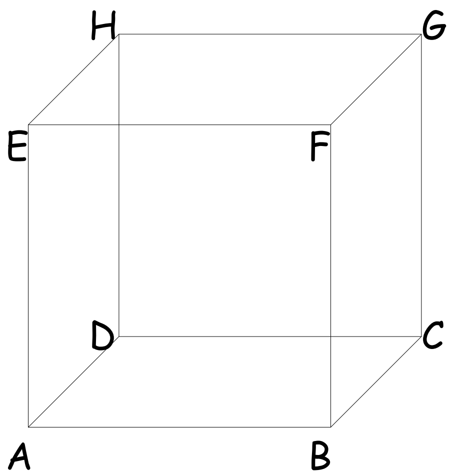
Zwei Geraden ...

- schneiden sich (g ∩ z = A)
- sind parallel (g || x)
- sind windschief (g und y)

Aufgabe

Zeichne den Würfel ABCDEFGH mit der Kantenlänge 4cm im Schrägbild und bestimme alle parallelen und windschiefen Geraden.

Lösung



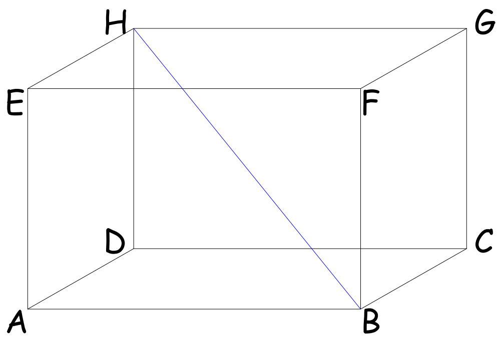
parallel:	AB || CD || EF || GH und AD || BC || FG || EH und AE || BF || CG || DH
windschief:	AD und EH, AD un EF, AD und GH, AD und BF, AD und CG ...

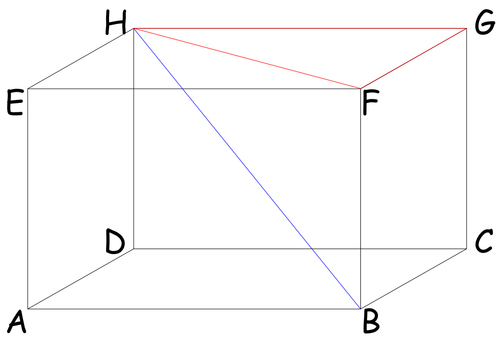
Aufgabe:

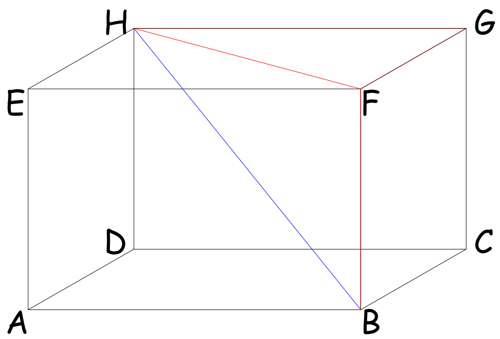
Konstruiere die Diagonale BH eines Quaders ABCDEFGH mit $\overline{AB} = 6$, $\overline{AD} = 4$ und $\overline{AE} = 3{,}5$ in wahrer Größe.

Lösung:

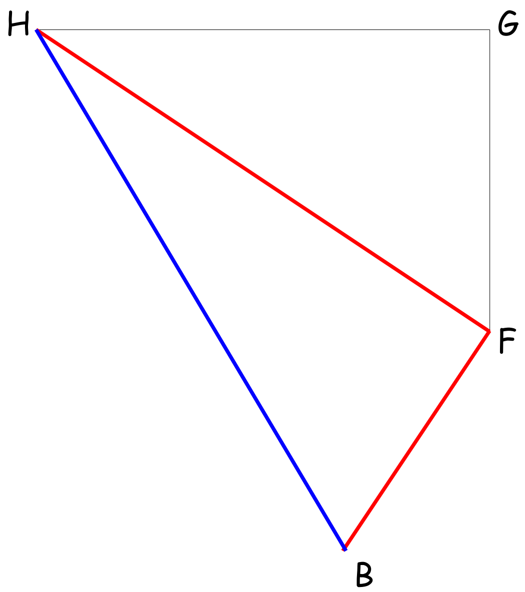
Idee: Konstruiere jeweils geeignete rechtwinklige Teildreiecke:







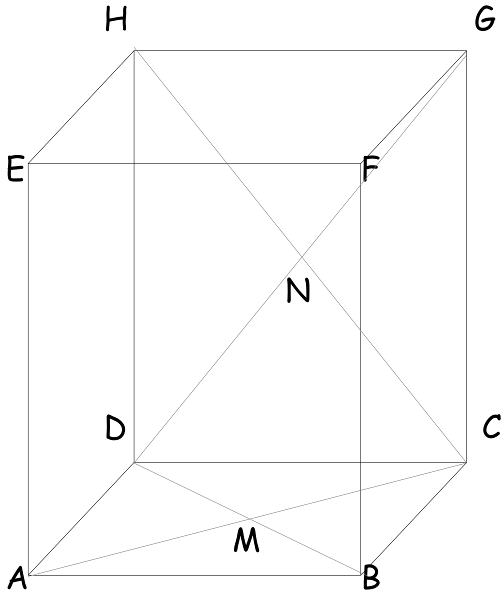
Konstruktion:



Aufgaben

Konstruiere jeweils in wahrer Größe:

1. Quader ABCDEFGH mit $\overline{AB} = 4$; $\overline{BC} = 3$ und $\overline{AE} = 5$

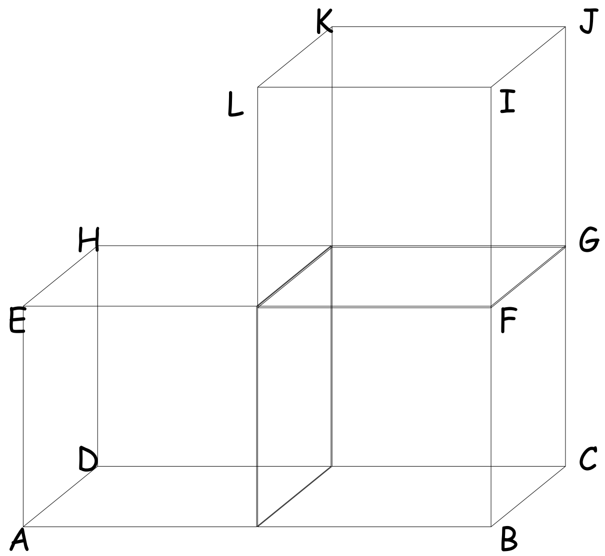


a) [BM]

b) [MH]

c) [NF]

d) [MN]



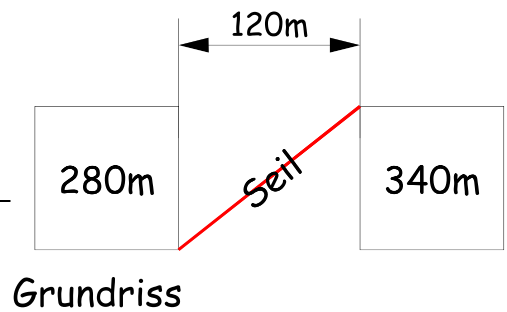
2. Die drei Teilkörper der Figur sind jeweils Würfel der Kantenlänge 3

a) [AF] b) [AG] c) [AJ] d) [HL]

3. Ein Seiltänzer will auf einem Seil vom Dach eines Wolkenkratzers zum Dach eines zweiten Wolkenkratzers wandern.

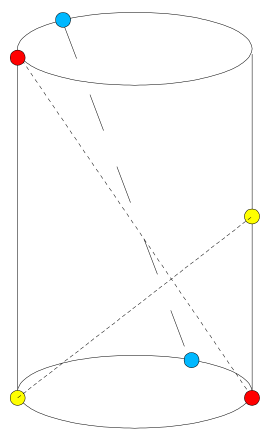
   Die beiden Wolkenkratzer stehen in gleicher N-S-Ausrichtung, der eine ist 280m, der andere 340m hoch, sie haben den Abstand 120m und sind jeweils 80m breit und 80m lang.

   Wie lang muss das Seil mindestens sein, wenn es vom SO-Ende des niedrigeren zum NW-Ende des hohen Gebäudes gespannt wird?



4. Zylinder

Gegeben ist ein Zylinder (Grundfläche: Kreis mit Radius 3cm; Höhe: 4cm). Konstruiere in wahrer Größe:



a) Eine Diagonale zwischen dem Bodenpunkt bei 0° und dem Deckpunkt bei 180° auf dem Kreis

b) Eine Diagonale zwischen dem Bodenpunkt bei 45° und dem Deckpunkt bei 135° auf dem Kreis

c) Eine Diagonale zwischen dem Bodenpunkt bei 180° und einem Punkt auf halber Höhe bei 0°.

Lösungen

1. Quader

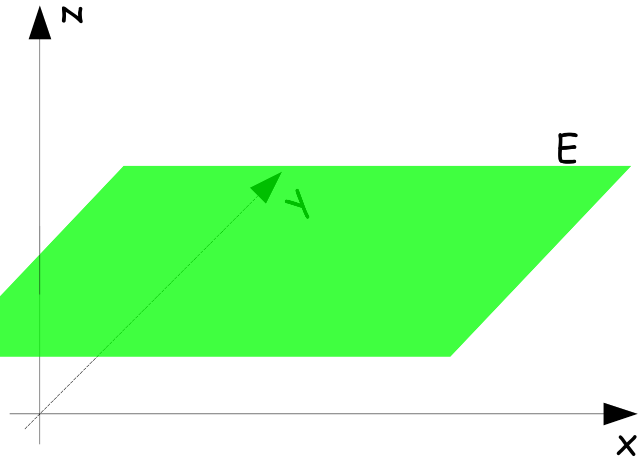
a) Konstruiere das Bodenquadrat, dann die Diagonale und halbiere sie.

b) Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten [AE] und [MH] (übertrage aus a). [MH] ist die Hypothenuse.

c) Konstruiere zuerst das Rechteck CGHD und N als den Schnittpunkt der Diagonalen. Konstruiere anschließend das rechtwinklige Dreieck mit den Katheten [NG] und [GF]. [NF] ist dann die Hypothenuse

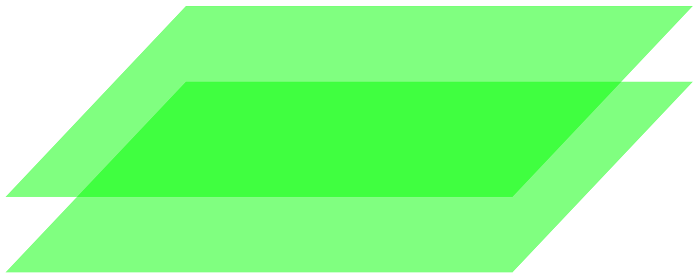
d) Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten ½ [AD] und ½ [AE]. [MN] ist dann die Hypothenuse

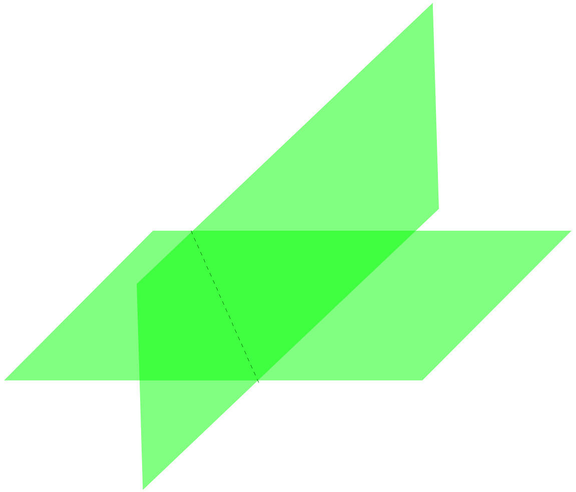
Ebenen im Raum



Eine Ebene ist festgelegt durch

- drei Punkte
- eine Gerade und einen Punkt, der nicht auf der Geraden liegt
- 2 nicht windschiefe Geraden





Zwei Ebenen

- sind parallel oder identisch, oder
- haben eine gemeinsame Gerade.

Lage zwischen Gerade und Ebene

Eine Gerade

- ist parallel zur Ebene oder Teilmenge der Ebene (liegt in ihr),
- oder schneidet die Ebene (der Schnittpunkt heißt Spurpunkt)

Eine Gerade steht senkrecht auf einer Ebene, wenn sie senkrecht auf jeder Geraden durch den Spurpunkt steht.

Zusammenfassung

Lage	Punkt	Gerade	Ebene
Punkt	$P = Q$ oder $P \neq Q$	$P \in g$ oder $P \notin g$	$P \in E$ oder $P \notin E$
Gerade	–	identisch, parallel, einen Schnittpunkt oder windschief	$g \in E$, $g \parallel E$ oder $g \cap E = S$
Ebene	–	–	identische, parallel oder Schnittgerade

Aufgabe

Prüfe, ob wahr oder falsch:

e) $g \parallel E$ und $h \parallel E \Rightarrow g \parallel h$

f) Schnittgeraden dreier sich schneidender Ebenen sind immer parallel

g) $g \subset E$ und $h \parallel g, \Rightarrow h \parallel E$

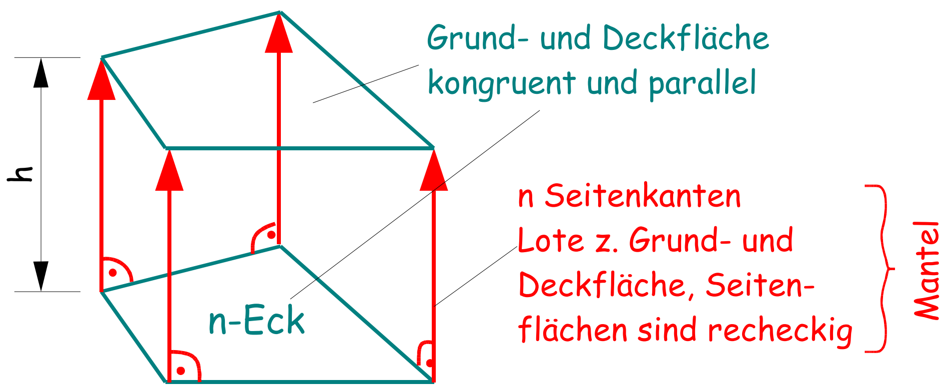
h) Steht eine Gerade aus E_1 auf der Schnittgerade von E_1 und E_2 senkrecht, so gilt $E_1 \perp E_2$

Das gerade Prisma

Welche Eigenschaften haben die folgenden Objekte gemeinsam?

Filzstift, Kassette, Tischplatte, Locher, Midi–Tower, Profilleiste

Definition

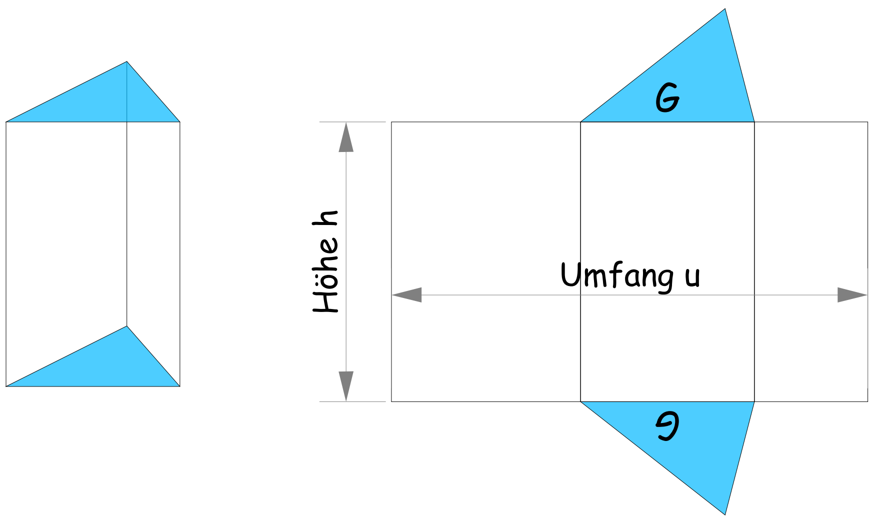


Hat die Grundfläche n Ecken, so besitzt das Prisma:

- 2n Ecken (oben und unten)
- 2n + n = 3n Kanten (2n: Grund– und Deckfläche; n Seitenkanten)
- 2 + n Flächen (Grund– und Deckfläche; n Seitenflächen)

Beispiel

Ein dreiseitiges gerades Prisma (Schrägbild und Netz)

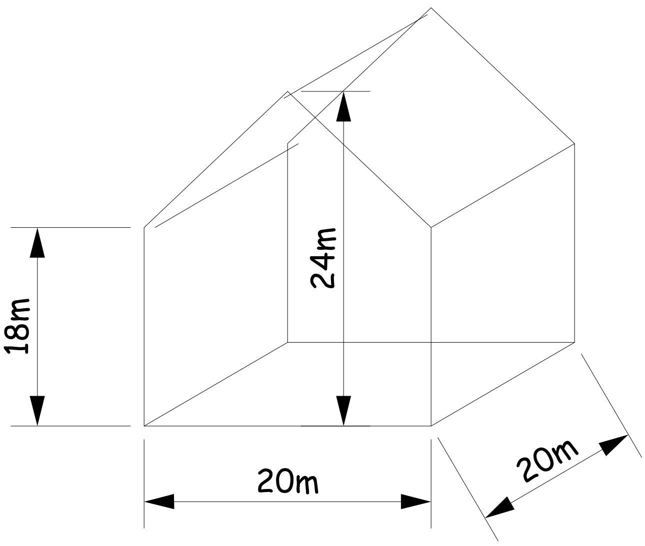


Die Oberfläche eines geraden Prismas (Grundfläche G, Umfang u) berechnet sich zu

$$O = 2 \cdot G + u \cdot h$$

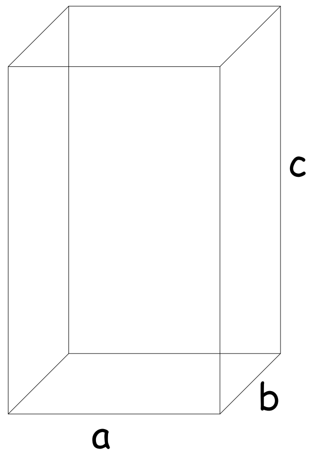
Aufgabe

Bestimme die Oberfläche des dargestellten Hauses.



Das Volumen des geraden Prismas

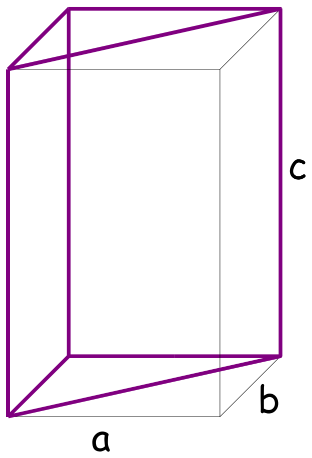
Spezialfall 1



Das Volumen eines Quaders (gerades Prisma mit rechteckiger Grundfläche) berechnet sich zu

$$V = a \cdot b \cdot c = G \cdot c$$

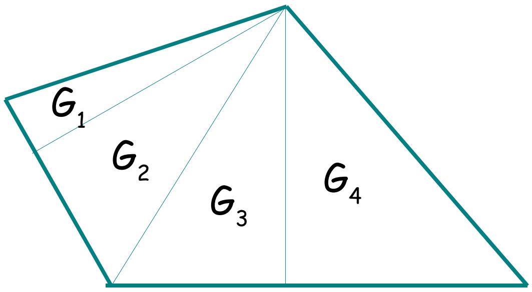
Spezialfall 2



Das Volumen eines dreiseitigen Prismas mit rechtem Winkel berechnet sich zu

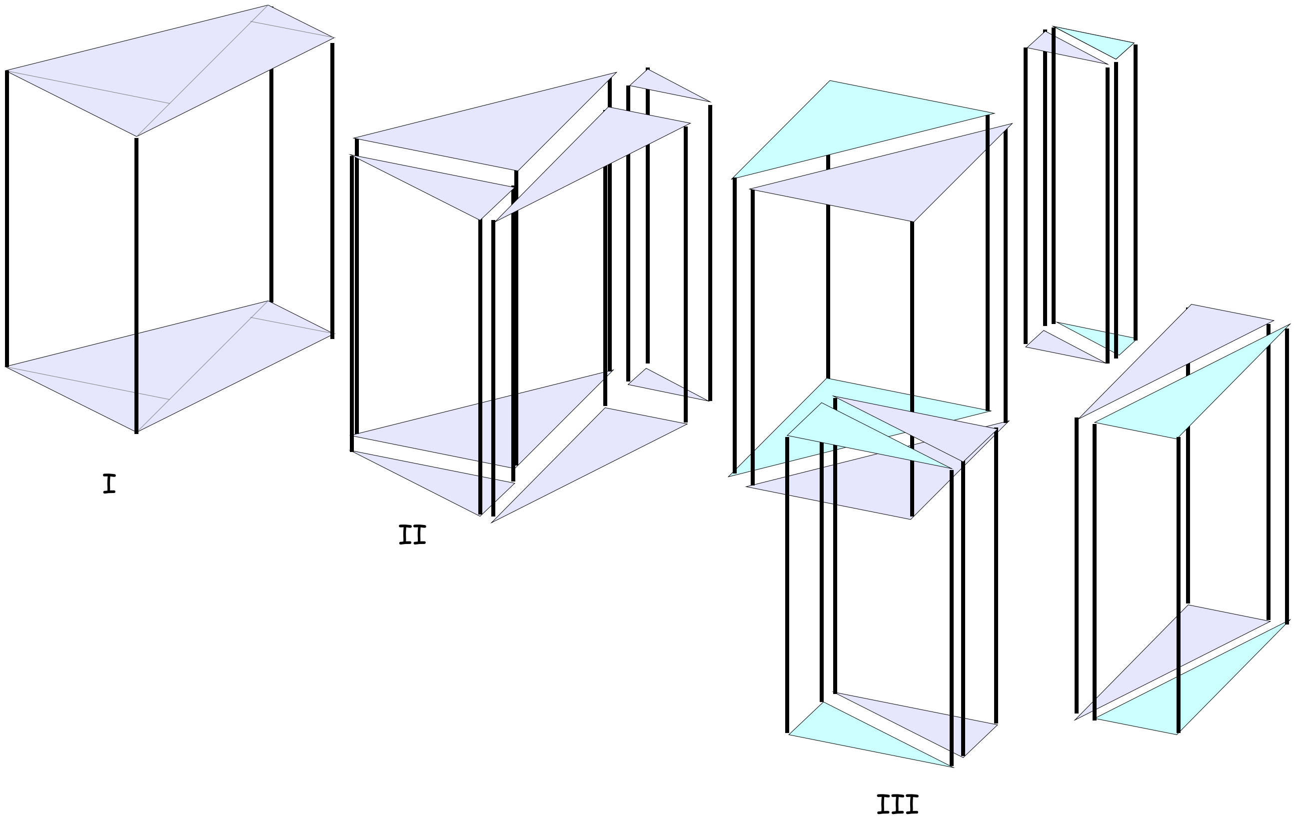
$$V = \frac{1}{2}(a \cdot b) \cdot c = G \cdot c$$

Allgemein



Jede beliebige Grundfläche lässt sich in rechtwinklige Dreiecke zerlegen.

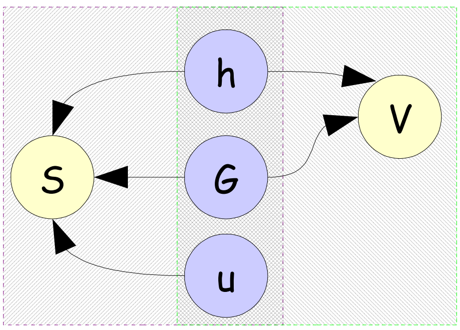
$V = G_1 \cdot h + G_2 \cdot h + G_3 \cdot h + G_4 \cdot h = (G_1 + G_2 + G_3 + G_4) \cdot h = G \cdot h$



Das Volumen eines beliebigen geraden Prismas berechnet sich zu Grundfläche · Höhe:

$$V = G \cdot h$$

Tipps zur Berechnung von gesuchten geometrischen Größen eines Prismas



$S = 2G + uh$; beschreibt einen Zusammenhang zwischen u, h, G und S

$V = G \cdot h$; beschreibt einen Zusammenhang zwischen h, G und V

Um alle gesuchten Größen zu berechnen:

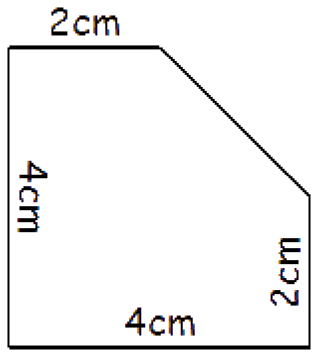
- Suche die Gleichung, bei der nur eine der Größen gesucht ist.
- Löse nach der gesuchten Größe auf
- Berechne die gesuchte Größe
- Löse die zweite Gleichung nach der zweiten gesuchten Größe auf
- Berechne die zweite gesuchte Größe

Aufgabe

Berechne Oberfläche und Volumen eines dreiseitigen Prismas mit a = 3cm, b = 4cm, c = 5cm und h = 6cm.

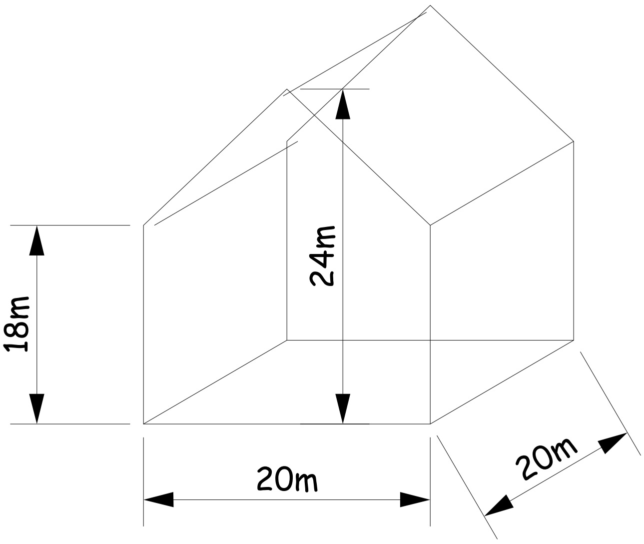
Aufgabe

Berechne die Masse einer 5m langen Holzleiste mit folgendem Profil:



Aufgabe

Bestimme das Volumen des dargestellten Hauses.



Lösung

Die Vorderfront stellt die Grundfläche des Prismas dar.

$G = 20m \cdot 18m + 0,5 \cdot 20m \cdot 6m =$

$= 360m^2 + 60m^2 = 420m^2$

$V = 420m^2 \cdot 20m = 8400m^3$

Aufgaben teilweise abgewandelt, aus [2]

1. Geobold behauptet, er habe ein Prisma mit

a) 53 Kanten

b) 53 Ecken

c) 53 Flächen gesehen.

In welchen Fällen hat er geschwindelt?

Lösung

Die Zahl der Kanten hängt nur von der Zahl n der Ecken der Grundfläche ab:

a) $3 \nmid 53$, falsch! b) $2 \nmid 53$, falsch! c) richtig, für $n = 51$

2. Berechne die Mantelfläche eines 16cm langen sechskantigen Bleistifts. Die Seitenlänge der Grundfläche beträgt 4mm.

Lösung

Berechnung der Mantelfläche: $S_M = u \cdot h = 6 \cdot 4mm \cdot 160mm = 3840\ mm^2$

3. Die Grundfläche eines geraden Prismas ist ein rechtwinkliges Dreieck mit den Kathetenlängen c = 4 und b = 3.

a) Konstruiere das Netz, wenn h = 7 ist

b) Berechne die Seitenlänge der Hypothenuse a, wenn der Oberflächeninhalt S = 108 beträgt.

Lösung

Grundfläche: $G = 3 \cdot 4 = 12$

Mantelfläche: $M = S - 2G = 108 - 24 = 84$

Umfang: $u = M : h = 84 : 7 = 12$

Hypothenusenlänge: $a = u - b - c = 12 - 7 = 5$

4. Berechne das Volumen des Wassers eines Schwimmbeckens (Länge 8m, Breite 4m, Tiefe Nichtschwimmer 1m, Tiefe Schwimmer 3m). Welches Gewicht hat es, wenn 1Liter Wasser 1 Kilogramm schwer ist?

Lösung

Die trapezförmigen Seitenflächen des Schwimmbads sind Grund- und Deckfläche des Prismas:

Trapezfläche: $G = 0{,}5\ (a + c) \cdot h = 0{,}5 \cdot (3m + 1m) \cdot 8m = 16m^2$

Volumen: $V = G \cdot h = 16m^2 \cdot 4m = 64m^3$

Gewicht: $64m^3 = 64000dm^3 = 64000l = 64000kg = 64t$

Parallelprojektion und Schrägbild

Die Parallelprojektion

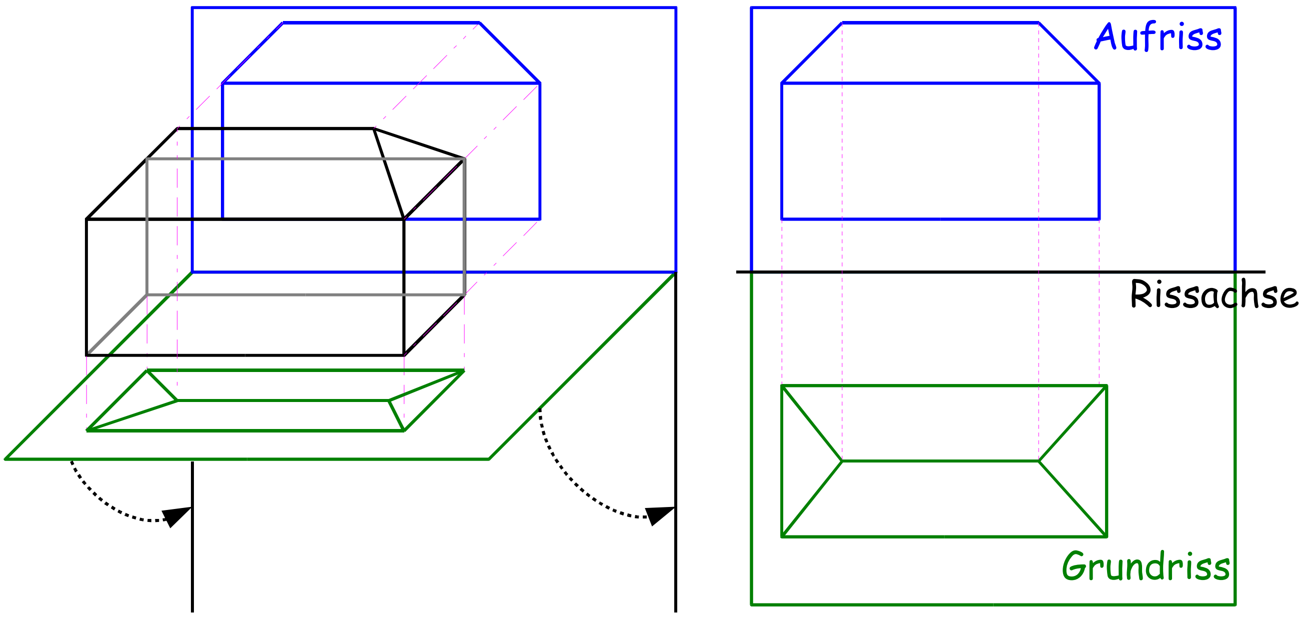
Prinzip einer Projektion am Beispiel einer Lampe

Licht einer Quelle fällt auf einen Drahtgitterkörper, der Schatten auf einer Fläche wirft.

- Rauminformation → Flächeninformation
- Information geht verloren (Körper ist aus Projektion nicht eindeutig rekonstruierbar)

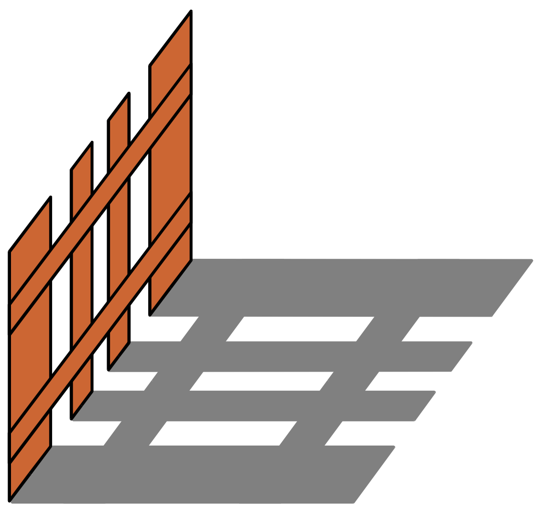
Die senkrechte Parallelprojektion

(Parallele Strahlen projizieren ein Drahtgitter senkrecht auf Fußboden und Wand)



Andere Parallelprojektionen

Beispiel: Lichtquelle, die parallele Strahlen aussendet (z.B. Sonne).



Ein Abbildung eines Körpers auf eine Ebene, bei der die Projektionsgeraden parallel verlaufen heißt Parallelprojektion.

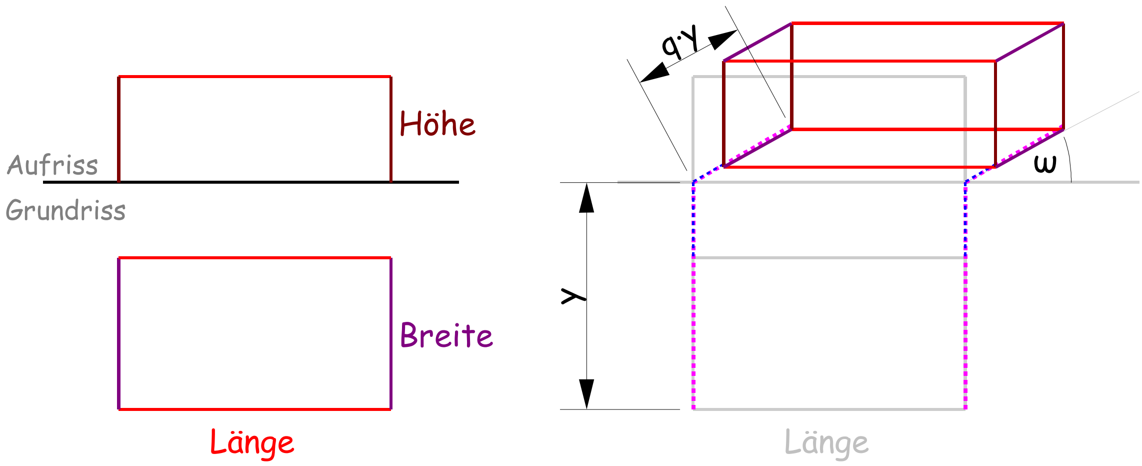
- Die Parallelprojektion ist im allgemeinen weder strecken-, noch winkeltreu, aber
- Strecken und Winkel, die parallel zur Projektionsebene stehen werden in wahrer Größe abgebildet
- Parallele Strecken haben parallele Bilder
- Mitten werden auf Mitten abgebildet

Aufgaben

1. Zeichne Grund- und Aufriss eines Quaders mit a = 6cm, b = 2cm, c = 1,5cm, der sich 3cm vor und 2cm oberhalb der Rissachse befindet.
2. Zeichne Grund- und Aufriss eines Zylinders mit h = 4cm, r = 1,5cm mit 3cm vor und 2cm oberhalb der Rissachse.
3. Eine Pyramide ABCDE hat folgende Raumkoordinaten: A(0;0;0); B(8;0;0); C(0;8;0); D(8;8;0); E (4;4;4)
   a) Zeichne Grund- und Aufriss.
   b) Konstruiere eine Kante von der Basis zur Spitze in wahrer Länge.
4. Ist ein Körper allein aus Grund- und Aufriss rekonstruierbar? Begründe deine Ansicht.
5. Zeichne Grund- und Aufriss einer Kugel mit M = (6;-6;-6) und r = 3
6. Zeichne (maßstabsgetreu) Grund- und Aufriss eines sechseckigen Bleistiftes..
7. Bilde das Rechteck A(2;2;2) B(2;6;2) C(2;6;8) D(2;2;8) mittels Parallelprojektion
   a) in z-Richtung auf die x-y-Ebene ab.
   b) in y-Richtung auf die x-z-Ebene ab.
   c) in x-Richtung auf die y-z-Ebene ab.
8. Der Aufriss und der Grundriss eines Körpers besteht jeweils aus einem Rechteck(Länge 4cm, Breite 3cm). Bestimme das Volumen.
9.

Schrägbilder

Von der senkrechten Parallelprojektion zum Schrägbild



q: Verzerrungsfaktor der y-Entfernung

ω: Winkel, um den Grundlinien an der Rissachse geneigt werden

Anleitung

1) Für alle Punkte P im Grundriss

   Bestimme L (Lotfußpunkt) als Schnittpunkt von Rissachse und dem Lot von P auf die Rissachse.

   Trage P' auf freiem Schenkel von ω in L und k(L;q · y) an.

2) Für alle außerhalb der Grundrissebene liegende Punkte Q

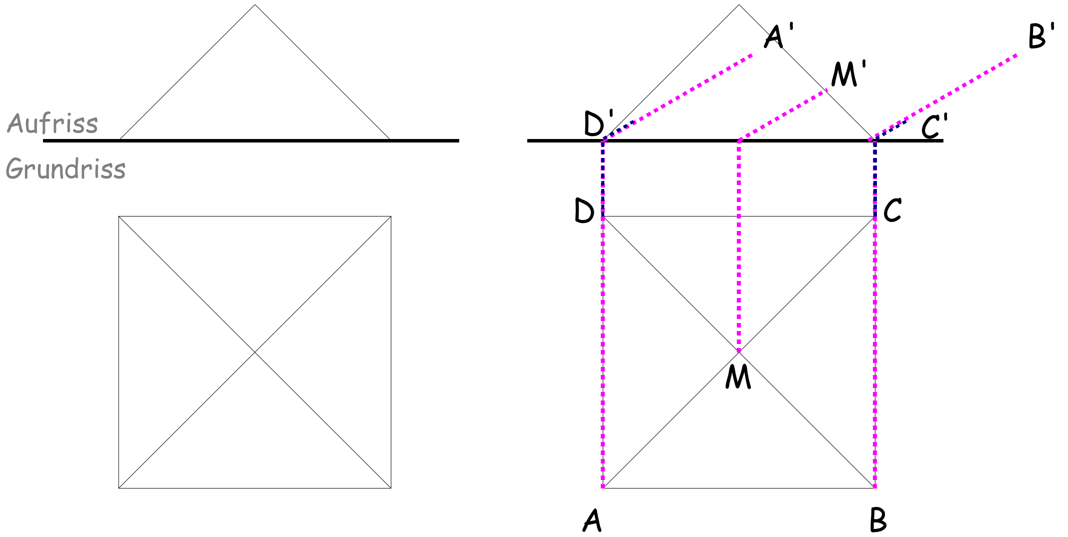
   Übertrage den Höhenfußpunkt in der Grundrissebene wie unter 1

   Trage den Abstand zur x-Achse in wahrer Größe senkrecht an

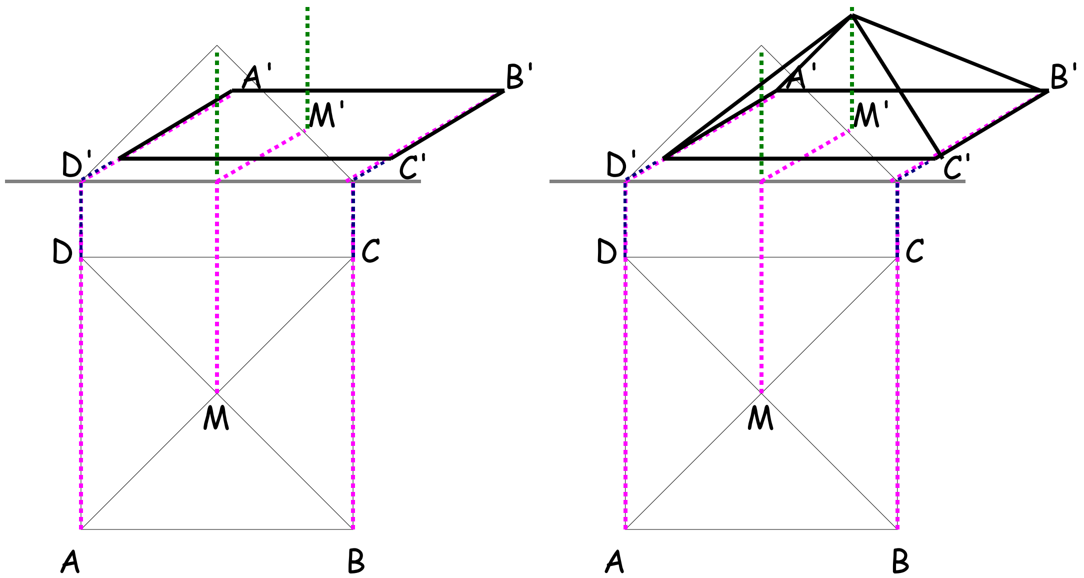
Aufgabe

Erzeuge aus Grund- und Aufriss einer quadratischen Pyramide (Seitenlänge a=3,6cm; Höhe h=1,6cm) ein Schrägbild mit $\omega = 30^\circ$ und $q = \frac{1}{2}$.

1. Konstruktion der Bildpunkte der Grundrissebene

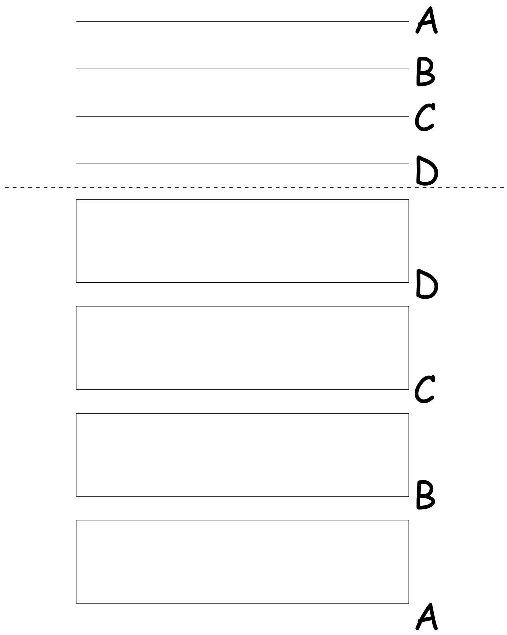


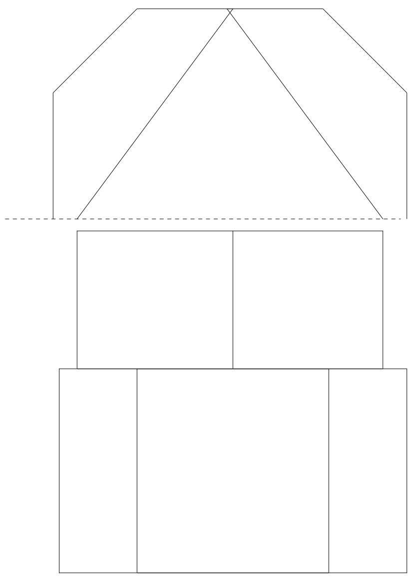
2. Konstruktion der Spitze und Verbinden der Punkte



Aufgaben

1. Erzeuge das Schrägbild eines Quaders (Länge 4cm, Breite 3cm, Höhe 5cm, kleinste Fläche liegt in der Grundrissebene) mit
   a) $q = 0{,}5$, $\omega = 30°$
   b) $q = 0{,}7$; $\omega = 45°$
   c) $q = 2$, $\omega = 45°$
   d) Welche der Schrägbilder erscheinen am „natürlichsten“?
2. Gegeben ist eine dreiseitige schiefe Pyramide mit A(0;0;0), B(0;3;0); C(3;0;0) in der Grundrissebene und D(4;4;3) als Spitze.
   a) Erzeuge Grund-(xy-Ebene) und Aufriss(xz-Ebene).
   b) Zeichne das Schrägbild mit $\omega = 30°$ und $q = 0{,}5$.
3. Zeichne zu den gegebenen Grund- und Aufrissen jeweils die Schrägbilder ($q=0{,}5$; $\omega=20°$) und berechne den Oberflächeninhalt:
   a) Treppe
   b) Zelt





Vergleich: senkrechte Parallelprojektion und Schrägbild

senkrechte Parallelprojektion	Schrägbild
alle Abstände werden in wahrer Größe abgebildet.	Zur Bildebene <u>parallele</u> Strecken erscheinen in wahrer Größe. Zur Bildebene <u>senkrechte</u> Strecken erscheinen um ω gegen die Rissachse geneigt und um das Verzerrungsverhältnis q gedehnt oder gestaucht.
nicht sehr anschaulich	entspricht eher unserem Seheindruck

Quellen

[1] Lambacher, Schweizer, Jahrgangsstufe 8 Mathematik, Klett-Verlag

[2] Barth, Krumbacher, Osiander, Barth, Anschauliche Geometrie 8, Ehrenwirth-Oldenbourg