LÖSUNG ABITUR-AUFGABEN 2007 ANALYSIS II

2007 Analysis II

1. $$f(x)=\frac{x^2-3}{x^2-9}$$

a) Einschränkung des Definitionsbereiches durch Nullstellen im Nenner:

$$x^2-9=0 \Rightarrow x=\pm 3$$

$$D_f=\mathbb{R}\backslash\{-3;+3\}$$

Nullstellen (Nullstellen des Zählers):

$$x^2-3=0 \Rightarrow x_{1/2}=\pm\sqrt{3}$$

Symmetrieverhalten:

$f(-x)=\frac{(-x)^2-3}{(-x)^2-9}=f(x)$, der Graph ist achsensymmetrisch.

b) Wegen der Symmetrie reicht es den positiven Bereich zu betrachten:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3}{x^2-9}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{3}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{9}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{3}{x^2}}{1-\frac{9}{x^2}}=1=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3}{x^2-9}$$

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-3}{x^2-9}=\infty=\lim_{x\to -3^-}\frac{x^2-3}{x^2-9} \qquad \lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-3}{x^2-9}=-\infty=\lim_{x\to -3^+}\frac{x^2-3}{x^2-9}$$

Waagerechte Asymptote $y=1$

Senkrechte Asymptoten $x=\pm 3$

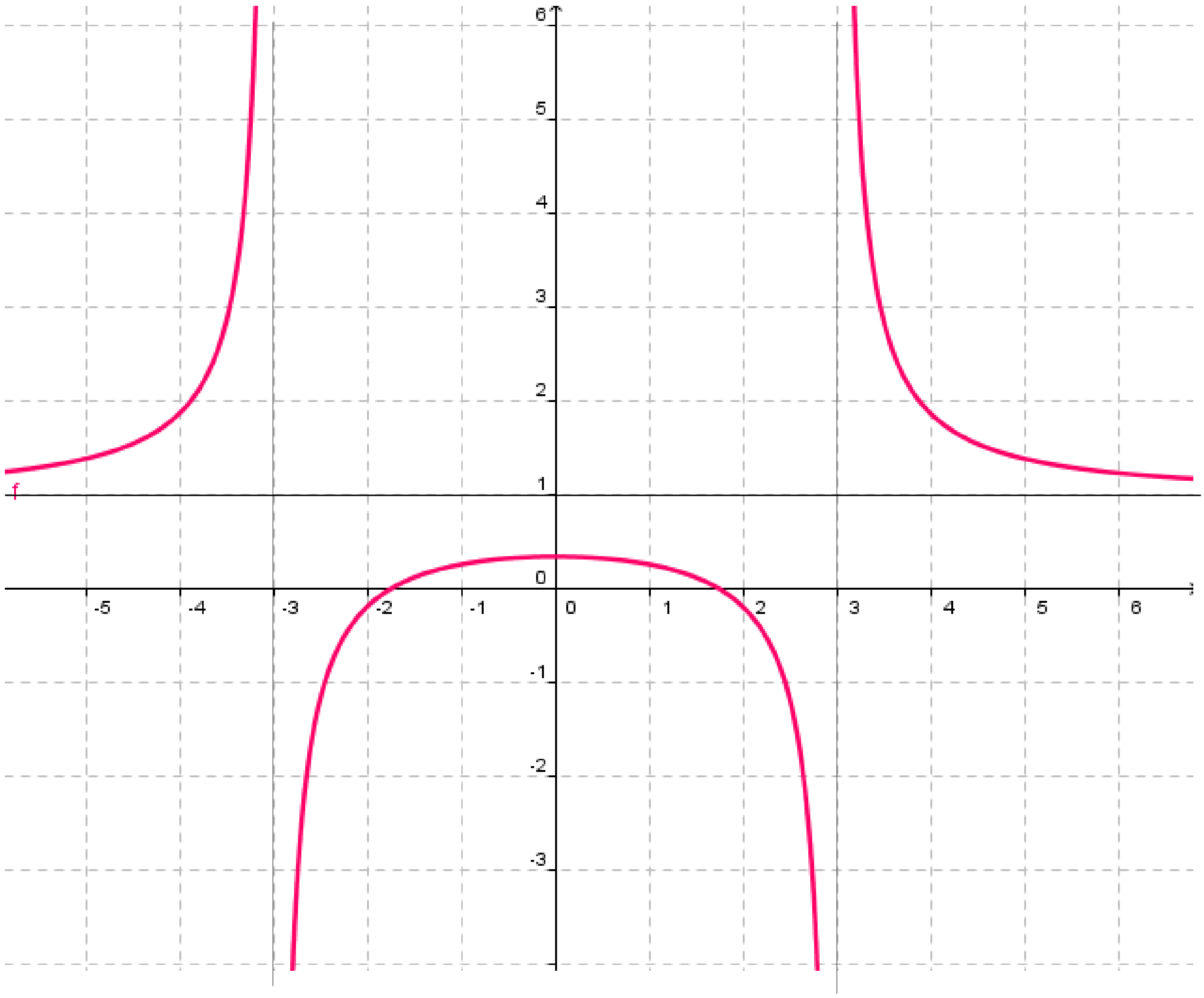
c) $$f'(x)=\frac{2x\cdot(x^2-9)-(x^2-3)\cdot 2x}{(x^2-9)^2}=\frac{2x^3-18x-2x^3+6x}{(x^2-9)^2}=\frac{-12x}{(x^2-9)^2}$$

Nullstelle der Ableitung: $x_3=0$

	$-3<x<0$	$x=0$	$0<x<3$
$f'(x)$	+	0	-
G_f	/	HOP	\

Es ergibt sich ein Hochpunkt mit den Koordinaten $E\left(0|\frac{1}{3}\right)$

d) $f(2{,}5) = -1{,}2 \quad f(4) = 1{,}9$



2. a) Die Logarithmusfunktion ist nur für positive Argumente definiert:

Löse die Ungleichung $\frac{3-x}{x+3} > 0$

Diese Ungleichung lässt sich lösen, indem man mit dem Nenner $x+3$ durchmultipliziert. Da es sich aber um eine Ungleichung handelt, kann sich das Ungleichheitszeichen umdrehen, je nachdem ob man mit einer positiven oder negativen Zahl durchmultipliziert.

<u>1. Fall</u>: Multiplikation mit einer positiven Zahl: $x+3>0$ oder $x>-3$
Das Ungleichheitszeichen bleibt erhalten, beim Durchmultiplizieren fällt links der Nenner weg und rechts bleibt 0 wegen $0 \cdot (x+3) = 0$ stehen:

$3 - x > 0 \Rightarrow 3 > x$

Vorbedingung: $x < -3$, dann ergibt sich $x < 3$, also Lösungsmenge: $L_1 =]-3\,;+3[$

<u>2. Fall</u>: Multiplikation mit einer negativen Zahl: $x+3<0$ oder $x<-3$
Das Ungleichheitszeichen dreht sich dieses Mal um, also steht als neue Gleichung da:

$3 - x < 0 \Rightarrow 3 < x$

Vorbedingung: $x < -3$ und Ergebnis $x > 3$ schließen sich aus, also $L_2 = \{\}$

also Defintionsbereich $D_f = L_1 \cup L_2 =]-3\,;+3[$

$$A = 2 \cdot \int_0^{+\sqrt{3}} f(x)\,dx = 2 \cdot \left[x + \ln\left(\frac{3-x}{x+3}\right) \right]_0^{\sqrt{3}} = 2 \cdot 0{,}41509 \approx 0{,}83$$

b) Eine Nullstelle liegt bei der unteren Integrationsgrenze.

Eine weitere Nullstelle ergibt sich wenn der bis $\sqrt{3}$ angesammelte positiv orientierte Flächeninhalt $A_p \approx 0{,}42$ durch den im weiteren Verlauf bis ins Unendliche anwachsenden negativ orientierten Flächeninhalt ausgeglichen wird.

Die gleich Argumentation gilt für die Integration in die negative x-Richtung, allerdings mit umgekehrten Vorzeichen, da zuerst oberhalb der x-Achse gegen die Orientierung der x-Achse integriert wird. Auf diese Weise entsteht die dritte Nullstelle im Definitionsbereich.

3. a) Wenn $-b > 0$ ist, dann bleibt der Nenner stets im positiven Bereich, hat also keine Nullstelle. Also muss gelten $b < 0$

$$x^2 - a = 0$$

Beim Graphen dieser Funktion handelt es sich um eine Normalparabel die um a in Richtung der negativen y-Achse verschoben ist.

Ist a = 0, so gibt es genau eine Nullstelle (Normalparabel)

Ist a > 0, dann gibt es zwei Nullstellen, denn die Parabel ist ja nach unten verschoben.

Ist a < 0, dann ist die Parabel nach oben verschoben und schneidet die x-Achse nicht mehr.

b) Wenn a positiv ist, dann muss es also zwei Nullstellen geben, Graph 3 fällt also aus.

Bei Graph 1 liegen die Nullstellen näher als die Polstellen am Ursprung, also die Nullstellen des Zählers $\pm\sqrt{a}$ müssen vom Betrag her kleiner sein als die Nullstellen $\pm\sqrt{b}$ des Nenners, was wegen der Monotonie der Wurzelfunktion bedeutet $|a| < |b|$. Dies widerspricht allerdings der Annahme dass 0 < b < a.

Also kommt nur Graph 2 infrage.