Abiturprüfung 1998

MATHEMATIK

als Grundkursfach

Arbeitszeit: 180 Minuten

Der Fachausschuss wählt je eine Aufgabe aus den Gebieten GM1, GM2 und GM3 zur Bearbeitung aus.

BE

GM1. INFINITESIMALRECHNUNG

I.

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{x}{2}\left[1+(\ln x)^2\right]$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}^+$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

Hinweis: Im Folgenden darf der Grenzwert $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} [x\,(\ln x)^n] = 0$ für $n \in \mathbb{N}$ ohne Beweis verwendet werden.

6 1. a) Zeigen Sie, dass $f'(x) = \frac{1}{2}(1+\ln x)^2$ ist, und folgern Sie daraus ohne Verwendung der zweiten Ableitung, dass G_f keinen Extrempunkt besitzt.

5 b) Ermitteln Sie das Krümmungsverhalten von G_f und weisen Sie nach, dass G_f genau einen Terrassenpunkt besitzt. Berechnen Sie dessen Koordinaten.

5 c) Untersuchen Sie das Verhalten von $f(x)$ und $f'(x)$ für $x \overset{>}{\to} 0$ und für $x \to +\infty$. Geben Sie die Wertemenge W_f der Funktion f an.

4 d) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von G_f mit der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten.

[zur Kontrolle: $(e^{-1}|e^{-1})$, $(e|e)$]

6 2. Berechnen Sie f (1,5) sowie f (4) und zeichnen Sie G_f unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse im Bereich $0 < x \leq 4$ (Längeneinheit 2 cm).

3 3. a) Weisen Sie nach, dass $F: x \mapsto \frac{x^2}{8}[2\,(\ln x)^2 - 2\ln x + 3]$ mit $x \in \mathbb{R}^+$ eine Stammfunktion von f ist.

7 b) Berechnen Sie für $0 < u < e^{-1}$ den Inhalt der Gesamtfläche A(u), die im Bereich $u \leq x \leq e$ zwischen G_f und der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten liegt. Berechnen Sie $\lim\limits_{u \to 0} A(u)$.

4 4. Die Funktion f ist umkehrbar (Nachweis nicht erforderlich). Der Graph der Umkehrfunktion von f wird mit $G_{f^{-1}}$ bezeichnet.
Geben Sie ohne Berechnung des Terms der Umkehrfunktion den Winkel an, unter dem G_f und $G_{f^{-1}}$ sich im Punkt $(e^{-1}|e^{-1})$ schneiden, und begründen Sie Ihr Ergebnis anschaulich.

40

BE

II.

Gegeben ist für $k \in \mathbb{R}^+$ die Schar von Funktionen $f_k : x \mapsto \dfrac{1}{(kx+1)^2}$ mit maximalem Definitionsbereich D_k. Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet.

7 1. a) Bestimmen Sie D_k. Untersuchen Sie das Verhalten von f_k an den Grenzen des Definitionsbereichs und geben Sie die Asymptoten von G_k an.

5 b) Zeigen Sie, dass in D_k gilt: $f_k\left(-\frac{1}{k}-x\right)=f_k\left(-\frac{1}{k}+x\right)$
Welche Symmetrieeigenschaft von G_k ist damit nachgewiesen?

5 c) Ermitteln Sie das Monotonieverhalten von f_k.

6 d) Zeigen Sie, dass alle Graphen der Schar genau einen gemeinsamen Punkt P haben, und stellen Sie eine Gleichung der Tangente t_k im Punkt P auf.

[Teilergebnis: P(0|1)]

Im Folgenden sei k = 0,5.

7 2. Berechnen Sie die Abszissen der Punkte von $G_{0,5}$, deren Ordinate den Wert 4 hat. Zeichnen Sie $G_{0,5}$ sowie $t_{0,5}$ (vgl. Teilaufgabe 1d) unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse im Bereich $-8 \le x \le 4$ (Längeneinheit 1 cm).

3 3. a) Zeigen Sie, dass $F: \ x \mapsto \dfrac{-4}{x+2}$ mit $D_F = D_{0,5}$ eine Stammfunktion von $f_{0,5}$ ist.

3 b) Ermitteln Sie die obere Integrationsgrenze t so, dass $\int_0^t f_{0,5}(x)dx = 1$ ist.

4 c) Der Graph $G_{0,5}$, die x-Achse, die Gerade x = 2 und die Gerade x = u (u >2) schließen ein Flächenstück vom Inhalt A(u) ein.
Berechnen Sie $\lim\limits_{u \to +\infty} A(u)$.

40

BE

GM2. WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG/STATISTIK

III.

In einer Fernsehshow werden Spiele mit 7 Kandidaten durchgeführt.

4 1. Da erfahrungsgemäß ein eingeladener Kandidat mit einer Wahrscheinlichkeit von 5 % nicht zur Sendung erscheint, werden insgesamt 9 Personen eingeladen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind bei der Sendung mindestens 7 Kandidaten anwesend?

2. Bei der Begrüßung sitzen die 7 Kandidaten, 4 Frauen und 3 Männer, in einer Reihe. Wie viele Sitzanordnungen gibt es, wenn hinsichtlich der Personen unterschieden wird und

3 a) die beiden Randplätze von Männern besetzt werden sollen,

3 b) sich in der Reihe Männer und Frauen stets abwechseln sollen?

Die Spiele werden mit einer “Glückswand” durchgeführt. Diese besteht aus 20 Feldern, auf die - zunächst unsichtbar - zufällig fünfmal die Zahl 200, viermal die Zahl 500 und dreimal die Zahl 1000 verteilt werden. Die übrigen Felder bleiben leer.

4 3. Wie viele derartige Verteilungen gibt es?

4. In der ersten Spielrunde decken die Kandidaten bei jedem Versuch zwei Felder zugleich auf. Ein Versuch gilt als erfolgreich, wenn dabei zwei gleiche Zahlen erscheinen.

5 a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit verläuft ein Versuch erfolgreich?
[Ergebnis: 0,1]

6 b) Ein Kandidat, der bei 3 Versuchen nicht wenigstens einmal erfolgreich ist, scheidet aus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit scheiden genau 5 von den 7 Kandidaten aus?

5. In der Endrunde darf ein Kandidat nacheinander beliebig viele der 20 Felder aufdecken. Erscheint ein Leerfeld, so hat er verloren. Anderenfalls gewinnt er die Summe der aufgedeckten Zahlen als DM-Betrag.

2 a) Ein Kandidat hat bereits zwei Zahlenfelder aufgedeckt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit geht er leer aus, wenn er noch ein drittes Feld aufdeckt?

7 b) Untersuchen Sie die folgenden Ereignisse auf Unabhängigkeit:
A: „Das erste aufgedeckte Feld zeigt die Zahl 200.“
B: „Die ersten beiden aufgedeckten Felder ergeben eine Summe größer als 1000.“

6 6. Kandidat K behauptet, hellseherische Fähigkeiten zu besitzen und Zahlenfelder mit erhöhter Wahrscheinlichkeit zu erkennen. In einem Test muss er 200-mal versuchen, ein Tausenderfeld zu finden. Nach jedem Versuch werden die Zahlen neu verteilt. K sollen mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 10 % irrtümlich hellseherische Fähigkeiten zugebilligt werden.

40 Ermitteln Sie die Entscheidungsregel.

BE

IV.

In einem Kaufhaus sollen auf Grund verlängerter Ladenschlusszeiten 12 neue Mitarbeiter eingestellt werden.

1. In Abteilung A sind 5 Stellen zu besetzen, in Abteilung B 7 Stellen. Für Abteilung A bewerben sich 8 und für Abteilung B 10 Personen.
   Wie viele Möglichkeiten gibt es, die offenen Stellen zu besetzen, wenn die Stellen innerhalb jeder Abteilung
   3 a) nicht unterschieden werden,
   3 b) als verschieden angesehen werden?
2. Bei der Begrüßung sitzen die 12 neuen Mitarbeiter, 8 Frauen und 4 Männer, in zwei Reihen mit je 6 Stühlen.
   Wie viele Sitzanordnungen gibt es, wenn nur nach Frauen und Männern unterschieden wird, und
   3 a) in jeder Reihe zwei Männer sitzen,
   3 b) die 4 Männer nebeneinander sitzen?
3. Die Wahrscheinlichkeit, dass Mitarbeiter in Kaufhäusern bereit sind, auch abends zu arbeiten, sei p.
   7 a) Wie groß ist im Fall $p = 0{,}8$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den 12 neuen Mitarbeitern mindestens 10 bereit sind, auch abends zu arbeiten?
   4 b) Wie groß müsste p mindestens sein, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 50 % alle 12 neuen Mitarbeiter bereit sind, auch abends zu arbeiten?

5 4. 45 % aller Kunden des Kaufhauses sind männlich, 50 % aller Kunden kaufen auch abends ein. 25 % aller Kunden sind weiblich und kaufen abends nicht ein. Untersuchen Sie die folgenden Ereignisse auf Unabhängigkeit:
   M: „Ein zufällig ausgewählter Kunde ist männlich.“
   A: „Ein zufällig ausgewählter Kunde kauft auch abends ein.“

5. Die Kaufhausleitung will die verlängerten Öffnungszeiten nur beibehalten, wenn diese von wenigstens 40 % der Kunden gewünscht werden. Dazu werden 200 zufällig ausgewählte Kunden befragt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, irrtümlich von den verlängerten Öffnungszeiten abzugehen, soll höchstens 5 % betragen.
   7 a) Ermitteln Sie die zugehörige Entscheidungsregel.
   5 b) Wie groß ist bei der Entscheidungsregel aus Teilaufgabe 5a die Wahrscheinlichkeit dafür, die verlängerten Öffnungszeiten beizubehalten, obwohl diese nur von 30 % der Kunden gewünscht werden?

40

BE

GM3. ANALYTISCHE GEOMETRIE

V.

In einem kartesischen Koordinatensystem bestimmen die Punkte A(0|-4|3), B(1|4|-2) und C(-2|4|1) die Ebene E.

6 1. a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC einen rechten Winkel besitzt, und berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

9 b) Ermitteln Sie die Koordinaten des Schwerpunkts S, des Umkreismittelpunkts U (Thaleskreis!) und des Höhenschnittpunkts H dieses rechtwinkligen Dreiecks ABC.
Erläutern Sie, warum die Punkte S, U und H auf einer Geraden liegen.
In welchem Verhältnis teilt U die Strecke [SH]?

5 c) Bestimmen Sie eine Gleichung der durch die Punkte A, B und C bestimmten Ebene E in Normalenform.
[mögliches Ergebnis: E: $2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2 = 0$]

2. Gegeben ist weiter die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 16 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

6 a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts T auf der Geraden g, der von A den kürzesten Abstand besitzt.
[zur Kontrolle: T(6|-1|9)]

5 b) Untersuchen Sie die gegenseitige Lage von g und E.

6 c) Berechnen Sie die Länge der Strecke [AT] und den Abstand des Punkts T von der Ebene E.
Warum steht die Gerade AT sowohl auf der Ebene E als auch auf der Geraden g senkrecht?
Fertigen Sie eine Skizze an, die die Geraden AT und g sowie die Ebene E enthält.

3 d) Geben Sie eine Gleichung der Kugel an, deren Mittelpunkt auf der Geraden g liegt und die die Ebene E in A berührt.

40

BE

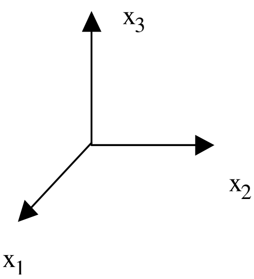
VI.

Die Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

bestimmen die Ebene E (Nachweis nicht erforderlich).
Zusätzlich ist die Ebene $H: x_1 + x_2 = 0$ gegeben.

5 1. a) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform.
[mögliches Ergebnis: E: $2x_1 - 2x_2 + x_3 - 6 = 0$]

3 b) Bestimmen Sie die Koordinaten a, b und c so, dass die Punkte A(a|0|0), B(0|b|0) und C(0|0|c) die Schnittpunkte der Ebene E mit den Koordinatenachsen sind.
Legen Sie ein Koordinatensystem an (vgl. Skizze) und tragen Sie das Dreieck ABC ein.



5 c) Die Ebenen E und H schneiden sich in der Geraden k. Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden k.

[mögliches Ergebnis: $k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\tau \in \mathbb{R}$]

6 d) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist.
Geben Sie den Fußpunkt F des Lots von dem Punkt C auf die Gerade AB an und tragen Sie das Lot und den Lotfußpunkt F in Ihre Zeichnung aus Teilaufgabe 1b ein.
Begründen Sie, dass die Strecke [CF] auf der Geraden k liegt.

4 e) Bestimmen Sie den Schnittwinkel α (auf 0,1° genau) der Geraden k und der x_3-Achse. Kennzeichnen Sie diesen Winkel in Ihrer Zeichnung.

5 f) Durch Spiegeln der Punkte A und B am Ursprung O erhält man die Punkte A' und B'. Tragen Sie diese Punkte in Ihre Zeichnung ein.
Berechnen Sie den Rauminhalt der Pyramide AB'A'BC.

3 2. a) Bestimmen Sie den Abstand eines beliebigen Punkts P(0|0|p) der x_3-Achse von der Ebene E in Abhängigkeit von p.

5 b) Bestimmen Sie die beiden Punkte der x_3-Achse, die von der x_1x_2-Ebene genauso weit entfernt sind wie von der Ebene E.
[Teilergebnis: P_1 (0|0|1,5)]

4 c) Geben Sie eine Gleichung der Kugel an, die der Pyramide AB'A'BC (vgl. Teilaufgabe 1f) einbeschrieben ist.

40

Abiturprüfung 1998

MATHEMATIK

als Grundkursfach

Arbeitszeit: 180 Minuten

Der Fachausschuss wählt je eine Aufgabe aus den Gebieten
GM1, GM2 und GM3 zur Bearbeitung aus.

BE

GM1. INFINITESIMALRECHNUNG

I.

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{x}{2}\left[1+(\ln x)^2\right]$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}^+$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

Hinweis: Im Folgenden darf der Grenzwert $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} [x\,(\ln x)^n] = 0$ für $n \in \mathbb{N}$ ohne Beweis verwendet werden.

6 1. a) Zeigen Sie, dass $f'(x) = \frac{1}{2}(1+\ln x)^2$ ist, und folgern Sie daraus ohne Verwendung der zweiten Ableitung, dass G_f keinen Extrempunkt besitzt.

5 b) Ermitteln Sie das Krümmungsverhalten von G_f und weisen Sie nach, dass G_f genau einen Terrassenpunkt besitzt. Berechnen Sie dessen Koordinaten.

5 c) Untersuchen Sie das Verhalten von $f(x)$ und $f'(x)$ für $x \overset{>}{\to} 0$ und für $x \to +\infty$. Geben Sie die Wertemenge W_f der Funktion f an.

4 d) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von G_f mit der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten.

[zur Kontrolle: $(e^{-1}|e^{-1})$, $(e|e)$]

6 2. Berechnen Sie $f(1{,}5)$ sowie $f(4)$ und zeichnen Sie G_f unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse im Bereich $0 < x \leq 4$ (Längeneinheit 2 cm).

3 3. a) Weisen Sie nach, dass $F: x \mapsto \frac{x^2}{8}[2\,(\ln x)^2 - 2\ln x + 3]$ mit $x \in \mathbb{R}^+$ eine Stammfunktion von f ist.

7 b) Berechnen Sie für $0 < u < e^{-1}$ den Inhalt der Gesamtfläche $A(u)$, die im Bereich $u \leq x \leq e$ zwischen G_f und der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten liegt. Berechnen Sie $\lim\limits_{u \to 0} A(u)$.

4 4. Die Funktion f ist umkehrbar (Nachweis nicht erforderlich). Der Graph der Umkehrfunktion von f wird mit $G_{f^{-1}}$ bezeichnet.
Geben Sie ohne Berechnung des Terms der Umkehrfunktion den Winkel an, unter dem G_f und $G_{f^{-1}}$ sich im Punkt $(e^{-1}|e^{-1})$ schneiden, und begründen Sie Ihr Ergebnis anschaulich.

40

BE

II.

Gegeben ist für $k \in \mathbb{R}^+$ die Schar von Funktionen $f_k : x \mapsto \dfrac{1}{(kx+1)^2}$ mit maximalem Definitionsbereich D_k. Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet.

7 1. a) Bestimmen Sie D_k. Untersuchen Sie das Verhalten von f_k an den Grenzen des Definitionsbereichs und geben Sie die Asymptoten von G_k an.

5 b) Zeigen Sie, dass in D_k gilt: $f_k\left(-\frac{1}{k}-x\right) = f_k\left(-\frac{1}{k}+x\right)$
Welche Symmetrieeigenschaft von G_k ist damit nachgewiesen?

5 c) Ermitteln Sie das Monotonieverhalten von f_k.

6 d) Zeigen Sie, dass alle Graphen der Schar genau einen gemeinsamen Punkt P haben, und stellen Sie eine Gleichung der Tangente t_k im Punkt P auf.

[Teilergebnis: P(0|1)]

Im Folgenden sei k = 0,5.

7 2. Berechnen Sie die Abszissen der Punkte von $G_{0,5}$, deren Ordinate den Wert 4 hat. Zeichnen Sie $G_{0,5}$ sowie $t_{0,5}$ (vgl. Teilaufgabe 1d) unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse im Bereich $-8 \le x \le 4$ (Längeneinheit 1 cm).

3 3. a) Zeigen Sie, dass $F: \; x \mapsto \dfrac{-4}{x+2}$ mit $D_F = D_{0,5}$ eine Stammfunktion von $f_{0,5}$ ist.

3 b) Ermitteln Sie die obere Integrationsgrenze t so, dass $\int_0^t f_{0,5}(x)\,dx = 1$ ist.

4 c) Der Graph $G_{0,5}$, die x-Achse, die Gerade x = 2 und die Gerade x = u (u >2) schließen ein Flächenstück vom Inhalt A(u) ein.
Berechnen Sie $\lim\limits_{u \to +\infty} A(u)$.

40

BE

GM2. WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG/STATISTIK

III.

In einer Fernsehshow werden Spiele mit 7 Kandidaten durchgeführt.

4 1. Da erfahrungsgemäß ein eingeladener Kandidat mit einer Wahrscheinlichkeit von 5 % nicht zur Sendung erscheint, werden insgesamt 9 Personen eingeladen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind bei der Sendung mindestens 7 Kandidaten anwesend?

2. Bei der Begrüßung sitzen die 7 Kandidaten, 4 Frauen und 3 Männer, in einer Reihe. Wie viele Sitzanordnungen gibt es, wenn hinsichtlich der Personen unterschieden wird und
3 a) die beiden Randplätze von Männern besetzt werden sollen,
3 b) sich in der Reihe Männer und Frauen stets abwechseln sollen?

Die Spiele werden mit einer "Glückswand" durchgeführt. Diese besteht aus 20 Feldern, auf die - zunächst unsichtbar - zufällig fünfmal die Zahl 200, viermal die Zahl 500 und dreimal die Zahl 1000 verteilt werden. Die übrigen Felder bleiben leer.

4 3. Wie viele derartige Verteilungen gibt es?

4. In der ersten Spielrunde decken die Kandidaten bei jedem Versuch zwei Felder zugleich auf. Ein Versuch gilt als erfolgreich, wenn dabei zwei gleiche Zahlen erscheinen.
5 a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit verläuft ein Versuch erfolgreich?
[Ergebnis: 0,1]
6 b) Ein Kandidat, der bei 3 Versuchen nicht wenigstens einmal erfolgreich ist, scheidet aus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit scheiden genau 5 von den 7 Kandidaten aus?

5. In der Endrunde darf ein Kandidat nacheinander beliebig viele der 20 Felder aufdecken. Erscheint ein Leerfeld, so hat er verloren. Anderenfalls gewinnt er die Summe der aufgedeckten Zahlen als DM-Betrag.
2 a) Ein Kandidat hat bereits zwei Zahlenfelder aufgedeckt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit geht er leer aus, wenn er noch ein drittes Feld aufdeckt?
7 b) Untersuchen Sie die folgenden Ereignisse auf Unabhängigkeit:
A: „Das erste aufgedeckte Feld zeigt die Zahl 200."
B: „Die ersten beiden aufgedeckten Felder ergeben eine Summe größer als 1000."

6 6. Kandidat K behauptet, hellseherische Fähigkeiten zu besitzen und Zahlenfelder mit erhöhter Wahrscheinlichkeit zu erkennen. In einem Test muss er 200-mal versuchen, ein Tausenderfeld zu finden. Nach jedem Versuch werden die Zahlen neu verteilt. K sollen mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 10 % irrtümlich hellseherische Fähigkeiten zugebilligt werden. Ermitteln Sie die Entscheidungsregel.

40

BE

IV.

In einem Kaufhaus sollen auf Grund verlängerter Ladenschlusszeiten 12 neue Mitarbeiter eingestellt werden.

1. In Abteilung A sind 5 Stellen zu besetzen, in Abteilung B 7 Stellen. Für Abteilung A bewerben sich 8 und für Abteilung B 10 Personen.
   Wie viele Möglichkeiten gibt es, die offenen Stellen zu besetzen, wenn die Stellen innerhalb jeder Abteilung
   3 a) nicht unterschieden werden,
   3 b) als verschieden angesehen werden?

2. Bei der Begrüßung sitzen die 12 neuen Mitarbeiter, 8 Frauen und 4 Männer, in zwei Reihen mit je 6 Stühlen.
   Wie viele Sitzanordnungen gibt es, wenn nur nach Frauen und Männern unterschieden wird, und
   3 a) in jeder Reihe zwei Männer sitzen,
   3 b) die 4 Männer nebeneinander sitzen?

3. Die Wahrscheinlichkeit, dass Mitarbeiter in Kaufhäusern bereit sind, auch abends zu arbeiten, sei p.
   7 a) Wie groß ist im Fall $p = 0{,}8$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den 12 neuen Mitarbeitern mindestens 10 bereit sind, auch abends zu arbeiten?
   4 b) Wie groß müsste p mindestens sein, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 50 % alle 12 neuen Mitarbeiter bereit sind, auch abends zu arbeiten?

5 4. 45 % aller Kunden des Kaufhauses sind männlich, 50 % aller Kunden kaufen auch abends ein. 25 % aller Kunden sind weiblich und kaufen abends nicht ein. Untersuchen Sie die folgenden Ereignisse auf Unabhängigkeit:
   M: „Ein zufällig ausgewählter Kunde ist männlich."
   A: „Ein zufällig ausgewählter Kunde kauft auch abends ein."

5. Die Kaufhausleitung will die verlängerten Öffnungszeiten nur beibehalten, wenn diese von wenigstens 40 % der Kunden gewünscht werden. Dazu werden 200 zufällig ausgewählte Kunden befragt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, irrtümlich von den verlängerten Öffnungszeiten abzugehen, soll höchstens 5 % betragen.
   7 a) Ermitteln Sie die zugehörige Entscheidungsregel.
   5 b) Wie groß ist bei der Entscheidungsregel aus Teilaufgabe 5a die Wahrscheinlichkeit dafür, die verlängerten Öffnungszeiten beizubehalten, obwohl diese nur von 30 % der Kunden gewünscht werden?

40

BE

GM3. ANALYTISCHE GEOMETRIE

V.

In einem kartesischen Koordinatensystem bestimmen die Punkte A(0|-4|3), B(1|4|-2) und C(-2|4|1) die Ebene E.

6 1. a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC einen rechten Winkel besitzt, und berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

9 b) Ermitteln Sie die Koordinaten des Schwerpunkts S, des Umkreismittelpunkts U (Thaleskreis!) und des Höhenschnittpunkts H dieses rechtwinkligen Dreiecks ABC.
Erläutern Sie, warum die Punkte S, U und H auf einer Geraden liegen.
In welchem Verhältnis teilt U die Strecke [SH]?

5 c) Bestimmen Sie eine Gleichung der durch die Punkte A, B und C bestimmten Ebene E in Normalenform.
[mögliches Ergebnis: E: $2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2 = 0$]

2. Gegeben ist weiter die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 16 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

6 a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts T auf der Geraden g, der von A den kürzesten Abstand besitzt.
[zur Kontrolle: T(6|-1|9)]

5 b) Untersuchen Sie die gegenseitige Lage von g und E.

6 c) Berechnen Sie die Länge der Strecke [AT] und den Abstand des Punkts T von der Ebene E.
Warum steht die Gerade AT sowohl auf der Ebene E als auch auf der Geraden g senkrecht?
Fertigen Sie eine Skizze an, die die Geraden AT und g sowie die Ebene E enthält.

3 d) Geben Sie eine Gleichung der Kugel an, deren Mittelpunkt auf der Geraden g liegt und die die Ebene E in A berührt.

40

BE

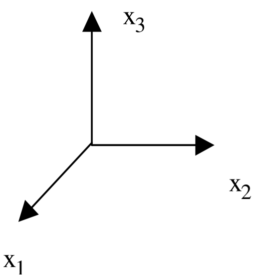
VI.

Die Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

bestimmen die Ebene E (Nachweis nicht erforderlich).
Zusätzlich ist die Ebene $H: x_1 + x_2 = 0$ gegeben.

5 1. a) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform.
[mögliches Ergebnis: E: $2x_1 - 2x_2 + x_3 - 6 = 0$]

3 b) Bestimmen Sie die Koordinaten a, b und c so, dass die Punkte A(a|0|0), B(0|b|0) und C(0|0|c) die Schnittpunkte der Ebene E mit den Koordinatenachsen sind.
Legen Sie ein Koordinatensystem an (vgl. Skizze) und tragen Sie das Dreieck ABC ein.



5 c) Die Ebenen E und H schneiden sich in der Geraden k. Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden k.

[mögliches Ergebnis: $k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}, \ \tau \in \mathbb{R}$]

6 d) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist.
Geben Sie den Fußpunkt F des Lots von dem Punkt C auf die Gerade AB an und tragen Sie das Lot und den Lotfußpunkt F in Ihre Zeichnung aus Teilaufgabe 1b ein.
Begründen Sie, dass die Strecke [CF] auf der Geraden k liegt.

4 e) Bestimmen Sie den Schnittwinkel α (auf 0,1° genau) der Geraden k und der x_3-Achse. Kennzeichnen Sie diesen Winkel in Ihrer Zeichnung.

5 f) Durch Spiegeln der Punkte A und B am Ursprung O erhält man die Punkte A' und B'. Tragen Sie diese Punkte in Ihre Zeichnung ein.
Berechnen Sie den Rauminhalt der Pyramide AB'A'BC.

3 2. a) Bestimmen Sie den Abstand eines beliebigen Punkts P(0|0|p) der x_3-Achse von der Ebene E in Abhängigkeit von p.

5 b) Bestimmen Sie die beiden Punkte der x_3-Achse, die von der x_1x_2-Ebene genauso weit entfernt sind wie von der Ebene E.
[Teilergebnis: P_1 (0|0|1,5)]

4 c) Geben Sie eine Gleichung der Kugel an, die der Pyramide AB'A'BC (vgl. Teilaufgabe 1f) einbeschrieben ist.

40

Abiturprüfung 1998

MATHEMATIK

als Grundkursfach

Arbeitszeit: 180 Minuten

Der Fachausschuss wählt je eine Aufgabe aus den Gebieten GM1, GM2 und GM3 zur Bearbeitung aus.

BE

GM1. INFINITESIMALRECHNUNG

I.

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{x}{2}\left[1+(\ln x)^2\right]$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}^+$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

Hinweis: Im Folgenden darf der Grenzwert $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} [x(\ln x)^n] = 0$ für $n \in \mathbb{N}$ ohne Beweis verwendet werden.

6 1. a) Zeigen Sie, dass $f'(x) = \frac{1}{2}(1+\ln x)^2$ ist, und folgern Sie daraus ohne Verwendung der zweiten Ableitung, dass G_f keinen Extrempunkt besitzt.

5 b) Ermitteln Sie das Krümmungsverhalten von G_f und weisen Sie nach, dass G_f genau einen Terrassenpunkt besitzt. Berechnen Sie dessen Koordinaten.

5 c) Untersuchen Sie das Verhalten von $f(x)$ und $f'(x)$ für $x \overset{>}{\to} 0$ und für $x \to +\infty$. Geben Sie die Wertemenge W_f der Funktion f an.

4 d) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von G_f mit der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten.

[zur Kontrolle: $(e^{-1}|e^{-1})$, $(e|e)$]

6 2. Berechnen Sie $f(1{,}5)$ sowie $f(4)$ und zeichnen Sie G_f unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse im Bereich $0 < x \leq 4$ (Längeneinheit 2 cm).

3 3. a) Weisen Sie nach, dass $F: x \mapsto \frac{x^2}{8}[2(\ln x)^2 - 2\ln x + 3]$ mit $x \in \mathbb{R}^+$ eine Stammfunktion von f ist.

7 b) Berechnen Sie für $0 < u < e^{-1}$ den Inhalt der Gesamtfläche $A(u)$, die im Bereich $u \leq x \leq e$ zwischen G_f und der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten liegt. Berechnen Sie $\lim\limits_{u \to 0} A(u)$.

4 4. Die Funktion f ist umkehrbar (Nachweis nicht erforderlich). Der Graph der Umkehrfunktion von f wird mit $G_{f^{-1}}$ bezeichnet.
Geben Sie ohne Berechnung des Terms der Umkehrfunktion den Winkel an, unter dem G_f und $G_{f^{-1}}$ sich im Punkt $(e^{-1}|e^{-1})$ schneiden, und begründen Sie Ihr Ergebnis anschaulich.

40

BE

II.

Gegeben ist für $k \in \mathbb{R}^+$ die Schar von Funktionen $f_k : x \mapsto \dfrac{1}{(kx+1)^2}$ mit maximalem Definitionsbereich D_k. Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet.

7 1. a) Bestimmen Sie D_k. Untersuchen Sie das Verhalten von f_k an den Grenzen des Definitionsbereichs und geben Sie die Asymptoten von G_k an.

5 b) Zeigen Sie, dass in D_k gilt: $f_k\left(-\frac{1}{k} - x\right) = f_k\left(-\frac{1}{k} + x\right)$
Welche Symmetrieeigenschaft von G_k ist damit nachgewiesen?

5 c) Ermitteln Sie das Monotonieverhalten von f_k.

6 d) Zeigen Sie, dass alle Graphen der Schar genau einen gemeinsamen Punkt P haben, und stellen Sie eine Gleichung der Tangente t_k im Punkt P auf.

[Teilergebnis: P(0|1)]

Im Folgenden sei k = 0,5.

7 2. Berechnen Sie die Abszissen der Punkte von $G_{0,5}$, deren Ordinate den Wert 4 hat. Zeichnen Sie $G_{0,5}$ sowie $t_{0,5}$ (vgl. Teilaufgabe 1d) unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse im Bereich $-8 \le x \le 4$ (Längeneinheit 1 cm).

3 3. a) Zeigen Sie, dass $F: \; x \mapsto \dfrac{-4}{x+2}$ mit $D_F = D_{0,5}$ eine Stammfunktion von $f_{0,5}$ ist.

3 b) Ermitteln Sie die obere Integrationsgrenze t so, dass $\int_0^t f_{0,5}(x)\,dx = 1$ ist.

4 c) Der Graph $G_{0,5}$, die x-Achse, die Gerade x = 2 und die Gerade x = u (u >2) schließen ein Flächenstück vom Inhalt A(u) ein.
Berechnen Sie $\lim\limits_{u \to +\infty} A(u)$.

40

BE

GM2. WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG/STATISTIK

III.

In einer Fernsehshow werden Spiele mit 7 Kandidaten durchgeführt.

4 1. Da erfahrungsgemäß ein eingeladener Kandidat mit einer Wahrscheinlichkeit von 5 % nicht zur Sendung erscheint, werden insgesamt 9 Personen eingeladen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind bei der Sendung mindestens 7 Kandidaten anwesend?

2. Bei der Begrüßung sitzen die 7 Kandidaten, 4 Frauen und 3 Männer, in einer Reihe. Wie viele Sitzanordnungen gibt es, wenn hinsichtlich der Personen unterschieden wird und

3 a) die beiden Randplätze von Männern besetzt werden sollen,

3 b) sich in der Reihe Männer und Frauen stets abwechseln sollen?

Die Spiele werden mit einer "Glückswand" durchgeführt. Diese besteht aus 20 Feldern, auf die - zunächst unsichtbar - zufällig fünfmal die Zahl 200, viermal die Zahl 500 und dreimal die Zahl 1000 verteilt werden. Die übrigen Felder bleiben leer.

4 3. Wie viele derartige Verteilungen gibt es?

4. In der ersten Spielrunde decken die Kandidaten bei jedem Versuch zwei Felder zugleich auf. Ein Versuch gilt als erfolgreich, wenn dabei zwei gleiche Zahlen erscheinen.

5 a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit verläuft ein Versuch erfolgreich?

[Ergebnis: 0,1]

6 b) Ein Kandidat, der bei 3 Versuchen nicht wenigstens einmal erfolgreich ist, scheidet aus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit scheiden genau 5 von den 7 Kandidaten aus?

5. In der Endrunde darf ein Kandidat nacheinander beliebig viele der 20 Felder aufdecken. Erscheint ein Leerfeld, so hat er verloren. Anderenfalls gewinnt er die Summe der aufgedeckten Zahlen als DM-Betrag.

2 a) Ein Kandidat hat bereits zwei Zahlenfelder aufgedeckt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit geht er leer aus, wenn er noch ein drittes Feld aufdeckt?

7 b) Untersuchen Sie die folgenden Ereignisse auf Unabhängigkeit:

A: „Das erste aufgedeckte Feld zeigt die Zahl 200."

B: „Die ersten beiden aufgedeckten Felder ergeben eine Summe größer als 1000."

6 6. Kandidat K behauptet, hellseherische Fähigkeiten zu besitzen und Zahlenfelder mit erhöhter Wahrscheinlichkeit zu erkennen. In einem Test muss er 200-mal versuchen, ein Tausenderfeld zu finden. Nach jedem Versuch werden die Zahlen neu verteilt. K sollen mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 10 % irrtümlich hellseherische Fähigkeiten zugebilligt werden. Ermitteln Sie die Entscheidungsregel.

40

BE

IV.

In einem Kaufhaus sollen auf Grund verlängerter Ladenschlusszeiten 12 neue Mitarbeiter eingestellt werden.

1. In Abteilung A sind 5 Stellen zu besetzen, in Abteilung B 7 Stellen. Für Abteilung A bewerben sich 8 und für Abteilung B 10 Personen.
   Wie viele Möglichkeiten gibt es, die offenen Stellen zu besetzen, wenn die Stellen innerhalb jeder Abteilung

3 a) nicht unterschieden werden,
3 b) als verschieden angesehen werden?

2. Bei der Begrüßung sitzen die 12 neuen Mitarbeiter, 8 Frauen und 4 Männer, in zwei Reihen mit je 6 Stühlen.
   Wie viele Sitzanordnungen gibt es, wenn nur nach Frauen und Männern unterschieden wird, und

3 a) in jeder Reihe zwei Männer sitzen,
3 b) die 4 Männer nebeneinander sitzen?

3. Die Wahrscheinlichkeit, dass Mitarbeiter in Kaufhäusern bereit sind, auch abends zu arbeiten, sei p.

7 a) Wie groß ist im Fall $p = 0{,}8$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den 12 neuen Mitarbeitern mindestens 10 bereit sind, auch abends zu arbeiten?
4 b) Wie groß müsste p mindestens sein, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 50 % alle 12 neuen Mitarbeiter bereit sind, auch abends zu arbeiten?

5 4. 45 % aller Kunden des Kaufhauses sind männlich, 50 % aller Kunden kaufen auch abends ein. 25 % aller Kunden sind weiblich und kaufen abends nicht ein. Untersuchen Sie die folgenden Ereignisse auf Unabhängigkeit:
   M: „Ein zufällig ausgewählter Kunde ist männlich."
   A: „Ein zufällig ausgewählter Kunde kauft auch abends ein."

5. Die Kaufhausleitung will die verlängerten Öffnungszeiten nur beibehalten, wenn diese von wenigstens 40 % der Kunden gewünscht werden. Dazu werden 200 zufällig ausgewählte Kunden befragt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, irrtümlich von den verlängerten Öffnungszeiten abzugehen, soll höchstens 5 % betragen.

7 a) Ermitteln Sie die zugehörige Entscheidungsregel.
5 b) Wie groß ist bei der Entscheidungsregel aus Teilaufgabe 5a die Wahrscheinlichkeit dafür, die verlängerten Öffnungszeiten beizubehalten, obwohl diese nur von 30 % der Kunden gewünscht werden?

40

BE

GM3. ANALYTISCHE GEOMETRIE

V.

In einem kartesischen Koordinatensystem bestimmen die Punkte A(0|-4|3), B(1|4|-2) und C(-2|4|1) die Ebene E.

6 1. a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC einen rechten Winkel besitzt, und berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

9 b) Ermitteln Sie die Koordinaten des Schwerpunkts S, des Umkreismittelpunkts U (Thaleskreis!) und des Höhenschnittpunkts H dieses rechtwinkligen Dreiecks ABC.
Erläutern Sie, warum die Punkte S, U und H auf einer Geraden liegen.
In welchem Verhältnis teilt U die Strecke [SH]?

5 c) Bestimmen Sie eine Gleichung der durch die Punkte A, B und C bestimmten Ebene E in Normalenform.
[mögliches Ergebnis: E: $2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2 = 0$]

2. Gegeben ist weiter die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 16 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

6 a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts T auf der Geraden g, der von A den kürzesten Abstand besitzt.
[zur Kontrolle: T(6|-1|9)]

5 b) Untersuchen Sie die gegenseitige Lage von g und E.

6 c) Berechnen Sie die Länge der Strecke [AT] und den Abstand des Punkts T von der Ebene E.
Warum steht die Gerade AT sowohl auf der Ebene E als auch auf der Geraden g senkrecht?
Fertigen Sie eine Skizze an, die die Geraden AT und g sowie die Ebene E enthält.

3 d) Geben Sie eine Gleichung der Kugel an, deren Mittelpunkt auf der Geraden g liegt und die die Ebene E in A berührt.

40

BE

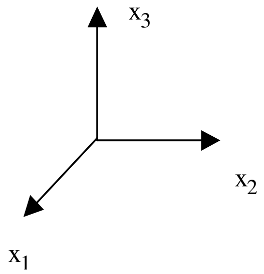
VI.

Die Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

bestimmen die Ebene E (Nachweis nicht erforderlich).
Zusätzlich ist die Ebene $H: x_1 + x_2 = 0$ gegeben.

5 1. a) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform.
[mögliches Ergebnis: E: $2x_1 - 2x_2 + x_3 - 6 = 0$]

3 b) Bestimmen Sie die Koordinaten a, b und c so, dass die Punkte A(a|0|0), B(0|b|0) und C(0|0|c) die Schnittpunkte der Ebene E mit den Koordinatenachsen sind.
Legen Sie ein Koordinatensystem an (vgl. Skizze) und tragen Sie das Dreieck ABC ein.



5 c) Die Ebenen E und H schneiden sich in der Geraden k. Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden k.

[mögliches Ergebnis: $k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}, \ \tau \in \mathbb{R}$]

6 d) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist.
Geben Sie den Fußpunkt F des Lots von dem Punkt C auf die Gerade AB an und tragen Sie das Lot und den Lotfußpunkt F in Ihre Zeichnung aus Teilaufgabe 1b ein.
Begründen Sie, dass die Strecke [CF] auf der Geraden k liegt.

4 e) Bestimmen Sie den Schnittwinkel α (auf 0,1° genau) der Geraden k und der x_3-Achse. Kennzeichnen Sie diesen Winkel in Ihrer Zeichnung.

5 f) Durch Spiegeln der Punkte A und B am Ursprung O erhält man die Punkte A' und B'. Tragen Sie diese Punkte in Ihre Zeichnung ein.
Berechnen Sie den Rauminhalt der Pyramide AB'A'BC.

3 2. a) Bestimmen Sie den Abstand eines beliebigen Punkts P(0|0|p) der x_3-Achse von der Ebene E in Abhängigkeit von p.

5 b) Bestimmen Sie die beiden Punkte der x_3-Achse, die von der x_1x_2-Ebene genauso weit entfernt sind wie von der Ebene E.
[Teilergebnis: P_1 (0|0|1,5)]

4 c) Geben Sie eine Gleichung der Kugel an, die der Pyramide AB'A'BC (vgl. Teilaufgabe 1f) einbeschrieben ist.

40

Abiturprüfung 1998

MATHEMATIK

als Grundkursfach

Arbeitszeit: 180 Minuten

Der Fachausschuss wählt je eine Aufgabe aus den Gebieten GM1, GM2 und GM3 zur Bearbeitung aus.

BE

GM1. INFINITESIMALRECHNUNG

I.

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{x}{2}\left[1+(\ln x)^2\right]$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}^+$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

Hinweis: Im Folgenden darf der Grenzwert $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} [x\,(\ln x)^n] = 0$ für $n \in \mathbb{N}$ ohne Beweis verwendet werden.

6 1. a) Zeigen Sie, dass $f'(x) = \frac{1}{2}(1+\ln x)^2$ ist, und folgern Sie daraus ohne Verwendung der zweiten Ableitung, dass G_f keinen Extrempunkt besitzt.

5 b) Ermitteln Sie das Krümmungsverhalten von G_f und weisen Sie nach, dass G_f genau einen Terrassenpunkt besitzt. Berechnen Sie dessen Koordinaten.

5 c) Untersuchen Sie das Verhalten von $f(x)$ und $f'(x)$ für $x \overset{>}{\to} 0$ und für $x \to +\infty$. Geben Sie die Wertemenge W_f der Funktion f an.

4 d) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von G_f mit der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten.

[zur Kontrolle: $(e^{-1}|e^{-1})$, $(e|e)$]

6 2. Berechnen Sie f (1,5) sowie f (4) und zeichnen Sie G_f unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse im Bereich $0 < x \leq 4$ (Längeneinheit 2 cm).

3 3. a) Weisen Sie nach, dass $F: x \mapsto \frac{x^2}{8}[2\,(\ln x)^2 - 2\ln x + 3]$ mit $x \in \mathbb{R}^+$ eine Stammfunktion von f ist.

7 b) Berechnen Sie für $0 < u < e^{-1}$ den Inhalt der Gesamtfläche A(u), die im Bereich $u \leq x \leq e$ zwischen G_f und der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten liegt. Berechnen Sie $\lim\limits_{u \to 0} A(u)$.

4 4. Die Funktion f ist umkehrbar (Nachweis nicht erforderlich). Der Graph der Umkehrfunktion von f wird mit $G_{f^{-1}}$ bezeichnet.
Geben Sie ohne Berechnung des Terms der Umkehrfunktion den Winkel an, unter dem G_f und $G_{f^{-1}}$ sich im Punkt $(e^{-1}|e^{-1})$ schneiden, und begründen Sie Ihr Ergebnis anschaulich.

40

BE

II.

Gegeben ist für $k \in \mathbb{R}^+$ die Schar von Funktionen $f_k : x \mapsto \dfrac{1}{(kx+1)^2}$ mit maximalem Definitionsbereich D_k. Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet.

7 1. a) Bestimmen Sie D_k. Untersuchen Sie das Verhalten von f_k an den Grenzen des Definitionsbereichs und geben Sie die Asymptoten von G_k an.

5 b) Zeigen Sie, dass in D_k gilt: $f_k\left(-\frac{1}{k} - x\right) = f_k\left(-\frac{1}{k} + x\right)$
Welche Symmetrieeigenschaft von G_k ist damit nachgewiesen?

5 c) Ermitteln Sie das Monotonieverhalten von f_k.

6 d) Zeigen Sie, dass alle Graphen der Schar genau einen gemeinsamen Punkt P haben, und stellen Sie eine Gleichung der Tangente t_k im Punkt P auf.

[Teilergebnis: P(0|1)]

Im Folgenden sei k = 0,5.

7 2. Berechnen Sie die Abszissen der Punkte von $G_{0,5}$, deren Ordinate den Wert 4 hat. Zeichnen Sie $G_{0,5}$ sowie $t_{0,5}$ (vgl. Teilaufgabe 1d) unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse im Bereich $-8 \le x \le 4$ (Längeneinheit 1 cm).

3 3. a) Zeigen Sie, dass $F: \; x \mapsto \dfrac{-4}{x+2}$ mit $D_F = D_{0,5}$ eine Stammfunktion von $f_{0,5}$ ist.

3 b) Ermitteln Sie die obere Integrationsgrenze t so, dass $\int\limits_0^t f_{0,5}(x)dx = 1$ ist.

4 c) Der Graph $G_{0,5}$, die x-Achse, die Gerade x = 2 und die Gerade x = u (u >2) schließen ein Flächenstück vom Inhalt A(u) ein.
Berechnen Sie $\lim\limits_{u \to +\infty} A(u)$.

40

BE

GM2. WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG/STATISTIK

III.

In einer Fernsehshow werden Spiele mit 7 Kandidaten durchgeführt.

4 1. Da erfahrungsgemäß ein eingeladener Kandidat mit einer Wahrscheinlichkeit von 5 % nicht zur Sendung erscheint, werden insgesamt 9 Personen eingeladen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind bei der Sendung mindestens 7 Kandidaten anwesend?

2. Bei der Begrüßung sitzen die 7 Kandidaten, 4 Frauen und 3 Männer, in einer Reihe. Wie viele Sitzanordnungen gibt es, wenn hinsichtlich der Personen unterschieden wird und

3 a) die beiden Randplätze von Männern besetzt werden sollen,

3 b) sich in der Reihe Männer und Frauen stets abwechseln sollen?

Die Spiele werden mit einer "Glückswand" durchgeführt. Diese besteht aus 20 Feldern, auf die - zunächst unsichtbar - zufällig fünfmal die Zahl 200, viermal die Zahl 500 und dreimal die Zahl 1000 verteilt werden. Die übrigen Felder bleiben leer.

4 3. Wie viele derartige Verteilungen gibt es?

4. In der ersten Spielrunde decken die Kandidaten bei jedem Versuch zwei Felder zugleich auf. Ein Versuch gilt als erfolgreich, wenn dabei zwei gleiche Zahlen erscheinen.

5 a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit verläuft ein Versuch erfolgreich? [Ergebnis: 0,1]

6 b) Ein Kandidat, der bei 3 Versuchen nicht wenigstens einmal erfolgreich ist, scheidet aus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit scheiden genau 5 von den 7 Kandidaten aus?

5. In der Endrunde darf ein Kandidat nacheinander beliebig viele der 20 Felder aufdecken. Erscheint ein Leerfeld, so hat er verloren. Anderenfalls gewinnt er die Summe der aufgedeckten Zahlen als DM-Betrag.

2 a) Ein Kandidat hat bereits zwei Zahlenfelder aufgedeckt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit geht er leer aus, wenn er noch ein drittes Feld aufdeckt?

7 b) Untersuchen Sie die folgenden Ereignisse auf Unabhängigkeit:
A: „Das erste aufgedeckte Feld zeigt die Zahl 200."
B: „Die ersten beiden aufgedeckten Felder ergeben eine Summe größer als 1000."

6 6. Kandidat K behauptet, hellseherische Fähigkeiten zu besitzen und Zahlenfelder mit erhöhter Wahrscheinlichkeit zu erkennen. In einem Test muss er 200-mal versuchen, ein Tausenderfeld zu finden. Nach jedem Versuch werden die Zahlen neu verteilt. K sollen mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 10 % irrtümlich hellseherische Fähigkeiten zugebilligt werden. Ermitteln Sie die Entscheidungsregel.

40

BE

IV.

In einem Kaufhaus sollen auf Grund verlängerter Ladenschlusszeiten 12 neue Mitarbeiter eingestellt werden.

1. In Abteilung A sind 5 Stellen zu besetzen, in Abteilung B 7 Stellen. Für Abteilung A bewerben sich 8 und für Abteilung B 10 Personen.
   Wie viele Möglichkeiten gibt es, die offenen Stellen zu besetzen, wenn die Stellen innerhalb jeder Abteilung
   3 a) nicht unterschieden werden,
   3 b) als verschieden angesehen werden?
2. Bei der Begrüßung sitzen die 12 neuen Mitarbeiter, 8 Frauen und 4 Männer, in zwei Reihen mit je 6 Stühlen.
   Wie viele Sitzanordnungen gibt es, wenn nur nach Frauen und Männern unterschieden wird, und
   3 a) in jeder Reihe zwei Männer sitzen,
   3 b) die 4 Männer nebeneinander sitzen?
3. Die Wahrscheinlichkeit, dass Mitarbeiter in Kaufhäusern bereit sind, auch abends zu arbeiten, sei p.
   7 a) Wie groß ist im Fall p = 0,8 die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den 12 neuen Mitarbeitern mindestens 10 bereit sind, auch abends zu arbeiten?
   4 b) Wie groß müsste p mindestens sein, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 50 % alle 12 neuen Mitarbeiter bereit sind, auch abends zu arbeiten?

5 4. 45 % aller Kunden des Kaufhauses sind männlich, 50 % aller Kunden kaufen auch abends ein. 25 % aller Kunden sind weiblich und kaufen abends nicht ein. Untersuchen Sie die folgenden Ereignisse auf Unabhängigkeit:
   M: „Ein zufällig ausgewählter Kunde ist männlich."
   A: „Ein zufällig ausgewählter Kunde kauft auch abends ein."

5. Die Kaufhausleitung will die verlängerten Öffnungszeiten nur beibehalten, wenn diese von wenigstens 40 % der Kunden gewünscht werden. Dazu werden 200 zufällig ausgewählte Kunden befragt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, irrtümlich von den verlängerten Öffnungszeiten abzugehen, soll höchstens 5 % betragen.
   7 a) Ermitteln Sie die zugehörige Entscheidungsregel.
   5 b) Wie groß ist bei der Entscheidungsregel aus Teilaufgabe 5a die Wahrscheinlichkeit dafür, die verlängerten Öffnungszeiten beizubehalten, obwohl diese nur von 30 % der Kunden gewünscht werden?

40

BE

GM3. ANALYTISCHE GEOMETRIE

V.

In einem kartesischen Koordinatensystem bestimmen die Punkte A(0|-4|3), B(1|4|-2) und C(-2|4|1) die Ebene E.

6 1. a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC einen rechten Winkel besitzt, und berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

9 b) Ermitteln Sie die Koordinaten des Schwerpunkts S, des Umkreismittelpunkts U (Thaleskreis!) und des Höhenschnittpunkts H dieses rechtwinkligen Dreiecks ABC.
Erläutern Sie, warum die Punkte S, U und H auf einer Geraden liegen.
In welchem Verhältnis teilt U die Strecke [SH]?

5 c) Bestimmen Sie eine Gleichung der durch die Punkte A, B und C bestimmten Ebene E in Normalenform.
[mögliches Ergebnis: E: $2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2 = 0$]

2. Gegeben ist weiter die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 16 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

6 a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts T auf der Geraden g, der von A den kürzesten Abstand besitzt.
[zur Kontrolle: T(6|-1|9)]

5 b) Untersuchen Sie die gegenseitige Lage von g und E.

6 c) Berechnen Sie die Länge der Strecke [AT] und den Abstand des Punkts T von der Ebene E.
Warum steht die Gerade AT sowohl auf der Ebene E als auch auf der Geraden g senkrecht?
Fertigen Sie eine Skizze an, die die Geraden AT und g sowie die Ebene E enthält.

3 d) Geben Sie eine Gleichung der Kugel an, deren Mittelpunkt auf der Geraden g liegt und die die Ebene E in A berührt.

40

BE

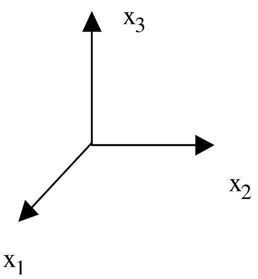
VI.

Die Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

bestimmen die Ebene E (Nachweis nicht erforderlich).
Zusätzlich ist die Ebene $H: x_1 + x_2 = 0$ gegeben.

5 1. a) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform.
[mögliches Ergebnis: E: $2x_1 - 2x_2 + x_3 - 6 = 0$]

3 b) Bestimmen Sie die Koordinaten a, b und c so, dass die Punkte A(a|0|0), B(0|b|0) und C(0|0|c) die Schnittpunkte der Ebene E mit den Koordinatenachsen sind.
Legen Sie ein Koordinatensystem an (vgl. Skizze) und tragen Sie das Dreieck ABC ein.



5 c) Die Ebenen E und H schneiden sich in der Geraden k. Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden k.

[mögliches Ergebnis: $k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}, \ \tau \in \mathbb{R}$]

6 d) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist.
Geben Sie den Fußpunkt F des Lots von dem Punkt C auf die Gerade AB an und tragen Sie das Lot und den Lotfußpunkt F in Ihre Zeichnung aus Teilaufgabe 1b ein.
Begründen Sie, dass die Strecke [CF] auf der Geraden k liegt.

4 e) Bestimmen Sie den Schnittwinkel α (auf 0,1° genau) der Geraden k und der x_3-Achse. Kennzeichnen Sie diesen Winkel in Ihrer Zeichnung.

5 f) Durch Spiegeln der Punkte A und B am Ursprung O erhält man die Punkte A' und B'. Tragen Sie diese Punkte in Ihre Zeichnung ein.
Berechnen Sie den Rauminhalt der Pyramide AB'A'BC.

3 2. a) Bestimmen Sie den Abstand eines beliebigen Punkts P(0|0|p) der x_3-Achse von der Ebene E in Abhängigkeit von p.

5 b) Bestimmen Sie die beiden Punkte der x_3-Achse, die von der x_1x_2-Ebene genauso weit entfernt sind wie von der Ebene E.
[Teilergebnis: P_1 (0|0|1,5)]

4 c) Geben Sie eine Gleichung der Kugel an, die der Pyramide AB'A'BC (vgl. Teilaufgabe 1f) einbeschrieben ist.

40

Abiturprüfung 1998

MATHEMATIK

als Grundkursfach

Arbeitszeit: 180 Minuten

Der Fachausschuss wählt je eine Aufgabe aus den Gebieten
GM1, GM2 und GM3 zur Bearbeitung aus.

BE

GM1. INFINITESIMALRECHNUNG

I.

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{x}{2}\left[1+(\ln x)^2\right]$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}^+$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

Hinweis: Im Folgenden darf der Grenzwert $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} [x\,(\ln x)^n] = 0$ für $n \in \mathbb{N}$ ohne Beweis verwendet werden.

6 1. a) Zeigen Sie, dass $f'(x) = \frac{1}{2}(1+\ln x)^2$ ist, und folgern Sie daraus ohne Verwendung der zweiten Ableitung, dass G_f keinen Extrempunkt besitzt.

5 b) Ermitteln Sie das Krümmungsverhalten von G_f und weisen Sie nach, dass G_f genau einen Terrassenpunkt besitzt. Berechnen Sie dessen Koordinaten.

5 c) Untersuchen Sie das Verhalten von $f(x)$ und $f'(x)$ für $x \overset{>}{\to} 0$ und für $x \to +\infty$. Geben Sie die Wertemenge W_f der Funktion f an.

4 d) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von G_f mit der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten.

[zur Kontrolle: $(e^{-1}|e^{-1})$, $(e|e)$]

6 2. Berechnen Sie f (1,5) sowie f (4) und zeichnen Sie G_f unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse im Bereich $0 < x \le 4$ (Längeneinheit 2 cm).

3 3. a) Weisen Sie nach, dass $F: x \mapsto \frac{x^2}{8}[2\,(\ln x)^2 - 2\ln x + 3]$ mit $x \in \mathbb{R}^+$ eine Stammfunktion von f ist.

7 b) Berechnen Sie für $0 < u < e^{-1}$ den Inhalt der Gesamtfläche A(u), die im Bereich $u \le x \le e$ zwischen G_f und der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten liegt. Berechnen Sie $\lim\limits_{u \to 0} A(u)$.

4 4. Die Funktion f ist umkehrbar (Nachweis nicht erforderlich). Der Graph der Umkehrfunktion von f wird mit $G_{f^{-1}}$ bezeichnet.
Geben Sie ohne Berechnung des Terms der Umkehrfunktion den Winkel an, unter dem G_f und $G_{f^{-1}}$ sich im Punkt $(e^{-1}|e^{-1})$ schneiden, und begründen Sie Ihr Ergebnis anschaulich.

40

BE

II.

Gegeben ist für $k \in \mathbb{R}^+$ die Schar von Funktionen $f_k : x \mapsto \dfrac{1}{(kx+1)^2}$ mit maximalem Definitionsbereich D_k. Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet.

7 1. a) Bestimmen Sie D_k. Untersuchen Sie das Verhalten von f_k an den Grenzen des Definitionsbereichs und geben Sie die Asymptoten von G_k an.

5 b) Zeigen Sie, dass in D_k gilt: $f_k\left(-\frac{1}{k} - x\right) = f_k\left(-\frac{1}{k} + x\right)$
Welche Symmetrieeigenschaft von G_k ist damit nachgewiesen?

5 c) Ermitteln Sie das Monotonieverhalten von f_k.

6 d) Zeigen Sie, dass alle Graphen der Schar genau einen gemeinsamen Punkt P haben, und stellen Sie eine Gleichung der Tangente t_k im Punkt P auf.

[Teilergebnis: P(0|1)]

Im Folgenden sei k = 0,5.

7 2. Berechnen Sie die Abszissen der Punkte von $G_{0,5}$, deren Ordinate den Wert 4 hat. Zeichnen Sie $G_{0,5}$ sowie $t_{0,5}$ (vgl. Teilaufgabe 1d) unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse im Bereich $-8 \le x \le 4$ (Längeneinheit 1 cm).

3 3. a) Zeigen Sie, dass $F: \ x \mapsto \dfrac{-4}{x+2}$ mit $D_F = D_{0,5}$ eine Stammfunktion von $f_{0,5}$ ist.

3 b) Ermitteln Sie die obere Integrationsgrenze t so, dass $\int_0^t f_{0,5}(x)dx = 1$ ist.

4 c) Der Graph $G_{0,5}$, die x-Achse, die Gerade x = 2 und die Gerade x = u (u >2) schließen ein Flächenstück vom Inhalt A(u) ein.
Berechnen Sie $\lim\limits_{u \to +\infty} A(u)$.

40

BE

GM2. WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG/STATISTIK

III.

In einer Fernsehshow werden Spiele mit 7 Kandidaten durchgeführt.

4 1. Da erfahrungsgemäß ein eingeladener Kandidat mit einer Wahrscheinlichkeit von 5 % nicht zur Sendung erscheint, werden insgesamt 9 Personen eingeladen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind bei der Sendung mindestens 7 Kandidaten anwesend?

2. Bei der Begrüßung sitzen die 7 Kandidaten, 4 Frauen und 3 Männer, in einer Reihe. Wie viele Sitzanordnungen gibt es, wenn hinsichtlich der Personen unterschieden wird und

3 a) die beiden Randplätze von Männern besetzt werden sollen,

3 b) sich in der Reihe Männer und Frauen stets abwechseln sollen?

Die Spiele werden mit einer "Glückswand" durchgeführt. Diese besteht aus 20 Feldern, auf die - zunächst unsichtbar - zufällig fünfmal die Zahl 200, viermal die Zahl 500 und dreimal die Zahl 1000 verteilt werden. Die übrigen Felder bleiben leer.

4 3. Wie viele derartige Verteilungen gibt es?

4. In der ersten Spielrunde decken die Kandidaten bei jedem Versuch zwei Felder zugleich auf. Ein Versuch gilt als erfolgreich, wenn dabei zwei gleiche Zahlen erscheinen.

5 a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit verläuft ein Versuch erfolgreich? [Ergebnis: 0,1]

6 b) Ein Kandidat, der bei 3 Versuchen nicht wenigstens einmal erfolgreich ist, scheidet aus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit scheiden genau 5 von den 7 Kandidaten aus?

5. In der Endrunde darf ein Kandidat nacheinander beliebig viele der 20 Felder aufdecken. Erscheint ein Leerfeld, so hat er verloren. Anderenfalls gewinnt er die Summe der aufgedeckten Zahlen als DM-Betrag.

2 a) Ein Kandidat hat bereits zwei Zahlenfelder aufgedeckt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit geht er leer aus, wenn er noch ein drittes Feld aufdeckt?

7 b) Untersuchen Sie die folgenden Ereignisse auf Unabhängigkeit:
A: „Das erste aufgedeckte Feld zeigt die Zahl 200."
B: „Die ersten beiden aufgedeckten Felder ergeben eine Summe größer als 1000."

6 6. Kandidat K behauptet, hellseherische Fähigkeiten zu besitzen und Zahlenfelder mit erhöhter Wahrscheinlichkeit zu erkennen. In einem Test muss er 200-mal versuchen, ein Tausenderfeld zu finden. Nach jedem Versuch werden die Zahlen neu verteilt. K sollen mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 10 % irrtümlich hellseherische Fähigkeiten zugebilligt werden. Ermitteln Sie die Entscheidungsregel.

40

BE

IV.

In einem Kaufhaus sollen auf Grund verlängerter Ladenschlusszeiten 12 neue Mitarbeiter eingestellt werden.

1. In Abteilung A sind 5 Stellen zu besetzen, in Abteilung B 7 Stellen. Für Abteilung A bewerben sich 8 und für Abteilung B 10 Personen.
   Wie viele Möglichkeiten gibt es, die offenen Stellen zu besetzen, wenn die Stellen innerhalb jeder Abteilung
   3 a) nicht unterschieden werden,
   3 b) als verschieden angesehen werden?

2. Bei der Begrüßung sitzen die 12 neuen Mitarbeiter, 8 Frauen und 4 Männer, in zwei Reihen mit je 6 Stühlen.
   Wie viele Sitzanordnungen gibt es, wenn nur nach Frauen und Männern unterschieden wird, und
   3 a) in jeder Reihe zwei Männer sitzen,
   3 b) die 4 Männer nebeneinander sitzen?

3. Die Wahrscheinlichkeit, dass Mitarbeiter in Kaufhäusern bereit sind, auch abends zu arbeiten, sei p.
   7 a) Wie groß ist im Fall $p = 0{,}8$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den 12 neuen Mitarbeitern mindestens 10 bereit sind, auch abends zu arbeiten?
   4 b) Wie groß müsste p mindestens sein, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 50 % alle 12 neuen Mitarbeiter bereit sind, auch abends zu arbeiten?

5 4. 45 % aller Kunden des Kaufhauses sind männlich, 50 % aller Kunden kaufen auch abends ein. 25 % aller Kunden sind weiblich und kaufen abends nicht ein. Untersuchen Sie die folgenden Ereignisse auf Unabhängigkeit:
   M: „Ein zufällig ausgewählter Kunde ist männlich."
   A: „Ein zufällig ausgewählter Kunde kauft auch abends ein."

5. Die Kaufhausleitung will die verlängerten Öffnungszeiten nur beibehalten, wenn diese von wenigstens 40 % der Kunden gewünscht werden. Dazu werden 200 zufällig ausgewählte Kunden befragt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, irrtümlich von den verlängerten Öffnungszeiten abzugehen, soll höchstens 5 % betragen.
   7 a) Ermitteln Sie die zugehörige Entscheidungsregel.
   5 b) Wie groß ist bei der Entscheidungsregel aus Teilaufgabe 5a die Wahrscheinlichkeit dafür, die verlängerten Öffnungszeiten beizubehalten, obwohl diese nur von 30 % der Kunden gewünscht werden?

40

BE

GM3. ANALYTISCHE GEOMETRIE

V.

In einem kartesischen Koordinatensystem bestimmen die Punkte A(0|-4|3), B(1|4|-2) und C(-2|4|1) die Ebene E.

6 1. a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC einen rechten Winkel besitzt, und berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

9 b) Ermitteln Sie die Koordinaten des Schwerpunkts S, des Umkreismittelpunkts U (Thaleskreis!) und des Höhenschnittpunkts H dieses rechtwinkligen Dreiecks ABC.
Erläutern Sie, warum die Punkte S, U und H auf einer Geraden liegen.
In welchem Verhältnis teilt U die Strecke [SH]?

5 c) Bestimmen Sie eine Gleichung der durch die Punkte A, B und C bestimmten Ebene E in Normalenform.
[mögliches Ergebnis: E: $2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2 = 0$]

2. Gegeben ist weiter die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 16 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

6 a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts T auf der Geraden g, der von A den kürzesten Abstand besitzt.
[zur Kontrolle: T(6|-1|9)]

5 b) Untersuchen Sie die gegenseitige Lage von g und E.

6 c) Berechnen Sie die Länge der Strecke [AT] und den Abstand des Punkts T von der Ebene E.
Warum steht die Gerade AT sowohl auf der Ebene E als auch auf der Geraden g senkrecht?
Fertigen Sie eine Skizze an, die die Geraden AT und g sowie die Ebene E enthält.

3 d) Geben Sie eine Gleichung der Kugel an, deren Mittelpunkt auf der Geraden g liegt und die die Ebene E in A berührt.

40

BE

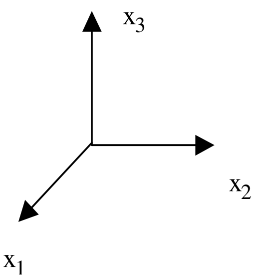
VI.

Die Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

bestimmen die Ebene E (Nachweis nicht erforderlich).
Zusätzlich ist die Ebene $H: x_1 + x_2 = 0$ gegeben.

5 1. a) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform.
[mögliches Ergebnis: E: $2x_1 - 2x_2 + x_3 - 6 = 0$]

3 b) Bestimmen Sie die Koordinaten a, b und c so, dass die Punkte A(a|0|0), B(0|b|0) und C(0|0|c) die Schnittpunkte der Ebene E mit den Koordinatenachsen sind.
Legen Sie ein Koordinatensystem an (vgl. Skizze) und tragen Sie das Dreieck ABC ein.



5 c) Die Ebenen E und H schneiden sich in der Geraden k. Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden k.

[mögliches Ergebnis: $k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}, \ \tau \in \mathbb{R}$]

6 d) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist.
Geben Sie den Fußpunkt F des Lots von dem Punkt C auf die Gerade AB an und tragen Sie das Lot und den Lotfußpunkt F in Ihre Zeichnung aus Teilaufgabe 1b ein.
Begründen Sie, dass die Strecke [CF] auf der Geraden k liegt.

4 e) Bestimmen Sie den Schnittwinkel α (auf 0,1° genau) der Geraden k und der x_3-Achse. Kennzeichnen Sie diesen Winkel in Ihrer Zeichnung.

5 f) Durch Spiegeln der Punkte A und B am Ursprung O erhält man die Punkte A' und B'. Tragen Sie diese Punkte in Ihre Zeichnung ein.
Berechnen Sie den Rauminhalt der Pyramide AB'A'BC.

3 2. a) Bestimmen Sie den Abstand eines beliebigen Punkts P(0|0|p) der x_3-Achse von der Ebene E in Abhängigkeit von p.

5 b) Bestimmen Sie die beiden Punkte der x_3-Achse, die von der x_1x_2-Ebene genauso weit entfernt sind wie von der Ebene E.
[Teilergebnis: P_1 (0|0|1,5)]

4 c) Geben Sie eine Gleichung der Kugel an, die der Pyramide AB'A'BC (vgl. Teilaufgabe 1f) einbeschrieben ist.

40

Abiturprüfung 1998

MATHEMATIK

als Grundkursfach

Arbeitszeit: 180 Minuten

Der Fachausschuss wählt je eine Aufgabe aus den Gebieten
GM1, GM2 und GM3 zur Bearbeitung aus.

BE

GM1. INFINITESIMALRECHNUNG

I.

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{x}{2}\left[1+(\ln x)^2\right]$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}^+$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

Hinweis: Im Folgenden darf der Grenzwert $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} [x(\ln x)^n] = 0$ für $n \in \mathbb{N}$ ohne Beweis verwendet werden.

6 1. a) Zeigen Sie, dass $f'(x) = \frac{1}{2}(1+\ln x)^2$ ist, und folgern Sie daraus ohne Verwendung der zweiten Ableitung, dass G_f keinen Extrempunkt besitzt.

5 b) Ermitteln Sie das Krümmungsverhalten von G_f und weisen Sie nach, dass G_f genau einen Terrassenpunkt besitzt. Berechnen Sie dessen Koordinaten.

5 c) Untersuchen Sie das Verhalten von $f(x)$ und $f'(x)$ für $x \overset{>}{\to} 0$ und für $x \to +\infty$. Geben Sie die Wertemenge W_f der Funktion f an.

4 d) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von G_f mit der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten.

[zur Kontrolle: $(e^{-1}|e^{-1})$, $(e|e)$]

6 2. Berechnen Sie f (1,5) sowie f (4) und zeichnen Sie G_f unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse im Bereich $0 < x \leq 4$ (Längeneinheit 2 cm).

3 3. a) Weisen Sie nach, dass $F: x \mapsto \frac{x^2}{8}[2(\ln x)^2 - 2\ln x + 3]$ mit $x \in \mathbb{R}^+$ eine Stammfunktion von f ist.

7 b) Berechnen Sie für $0 < u < e^{-1}$ den Inhalt der Gesamtfläche A(u), die im Bereich $u \leq x \leq e$ zwischen G_f und der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten liegt. Berechnen Sie $\lim\limits_{u \to 0} A(u)$.

4 4. Die Funktion f ist umkehrbar (Nachweis nicht erforderlich). Der Graph der Umkehrfunktion von f wird mit $G_{f^{-1}}$ bezeichnet.
Geben Sie ohne Berechnung des Terms der Umkehrfunktion den Winkel an, unter dem G_f und $G_{f^{-1}}$ sich im Punkt $(e^{-1}|e^{-1})$ schneiden, und begründen Sie Ihr Ergebnis anschaulich.

40

BE

II.

Gegeben ist für $k \in \mathbb{R}^+$ die Schar von Funktionen $f_k : x \mapsto \dfrac{1}{(kx+1)^2}$ mit maximalem Definitionsbereich D_k. Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet.

7 1. a) Bestimmen Sie D_k. Untersuchen Sie das Verhalten von f_k an den Grenzen des Definitionsbereichs und geben Sie die Asymptoten von G_k an.

5 b) Zeigen Sie, dass in D_k gilt: $f_k\left(-\frac{1}{k} - x\right) = f_k\left(-\frac{1}{k} + x\right)$
Welche Symmetrieeigenschaft von G_k ist damit nachgewiesen?

5 c) Ermitteln Sie das Monotonieverhalten von f_k.

6 d) Zeigen Sie, dass alle Graphen der Schar genau einen gemeinsamen Punkt P haben, und stellen Sie eine Gleichung der Tangente t_k im Punkt P auf.

[Teilergebnis: $P(0|1)$]

Im Folgenden sei $k = 0{,}5$.

7 2. Berechnen Sie die Abszissen der Punkte von $G_{0,5}$, deren Ordinate den Wert 4 hat. Zeichnen Sie $G_{0,5}$ sowie $t_{0,5}$ (vgl. Teilaufgabe 1d) unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse im Bereich $-8 \le x \le 4$ (Längeneinheit 1 cm).

3 3. a) Zeigen Sie, dass $F: \ x \mapsto \dfrac{-4}{x+2}$ mit $D_F = D_{0,5}$ eine Stammfunktion von $f_{0,5}$ ist.

3 b) Ermitteln Sie die obere Integrationsgrenze t so, dass $\int_0^t f_{0,5}(x)\,dx = 1$ ist.

4 c) Der Graph $G_{0,5}$, die x-Achse, die Gerade $x = 2$ und die Gerade $x = u$ $(u > 2)$ schließen ein Flächenstück vom Inhalt $A(u)$ ein.
Berechnen Sie $\lim\limits_{u \to +\infty} A(u)$.

40

BE

GM2. WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG/STATISTIK

III.

In einer Fernsehshow werden Spiele mit 7 Kandidaten durchgeführt.

4 1. Da erfahrungsgemäß ein eingeladener Kandidat mit einer Wahrscheinlichkeit von 5 % nicht zur Sendung erscheint, werden insgesamt 9 Personen eingeladen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind bei der Sendung mindestens 7 Kandidaten anwesend?

2. Bei der Begrüßung sitzen die 7 Kandidaten, 4 Frauen und 3 Männer, in einer Reihe. Wie viele Sitzanordnungen gibt es, wenn hinsichtlich der Personen unterschieden wird und

3 a) die beiden Randplätze von Männern besetzt werden sollen,

3 b) sich in der Reihe Männer und Frauen stets abwechseln sollen?

Die Spiele werden mit einer "Glückswand" durchgeführt. Diese besteht aus 20 Feldern, auf die - zunächst unsichtbar - zufällig fünfmal die Zahl 200, viermal die Zahl 500 und dreimal die Zahl 1000 verteilt werden. Die übrigen Felder bleiben leer.

4 3. Wie viele derartige Verteilungen gibt es?

4. In der ersten Spielrunde decken die Kandidaten bei jedem Versuch zwei Felder zugleich auf. Ein Versuch gilt als erfolgreich, wenn dabei zwei gleiche Zahlen erscheinen.

5 a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit verläuft ein Versuch erfolgreich? [Ergebnis: 0,1]

6 b) Ein Kandidat, der bei 3 Versuchen nicht wenigstens einmal erfolgreich ist, scheidet aus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit scheiden genau 5 von den 7 Kandidaten aus?

5. In der Endrunde darf ein Kandidat nacheinander beliebig viele der 20 Felder aufdecken. Erscheint ein Leerfeld, so hat er verloren. Anderenfalls gewinnt er die Summe der aufgedeckten Zahlen als DM-Betrag.

2 a) Ein Kandidat hat bereits zwei Zahlenfelder aufgedeckt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit geht er leer aus, wenn er noch ein drittes Feld aufdeckt?

7 b) Untersuchen Sie die folgenden Ereignisse auf Unabhängigkeit:
A: „Das erste aufgedeckte Feld zeigt die Zahl 200."
B: „Die ersten beiden aufgedeckten Felder ergeben eine Summe größer als 1000."

6 6. Kandidat K behauptet, hellseherische Fähigkeiten zu besitzen und Zahlenfelder mit erhöhter Wahrscheinlichkeit zu erkennen. In einem Test muss er 200-mal versuchen, ein Tausenderfeld zu finden. Nach jedem Versuch werden die Zahlen neu verteilt. K sollen mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 10 % irrtümlich hellseherische Fähigkeiten zugebilligt werden. Ermitteln Sie die Entscheidungsregel.

40

BE

IV.

In einem Kaufhaus sollen auf Grund verlängerter Ladenschlusszeiten 12 neue Mitarbeiter eingestellt werden.

1. In Abteilung A sind 5 Stellen zu besetzen, in Abteilung B 7 Stellen. Für Abteilung A bewerben sich 8 und für Abteilung B 10 Personen.
   Wie viele Möglichkeiten gibt es, die offenen Stellen zu besetzen, wenn die Stellen innerhalb jeder Abteilung

3 a) nicht unterschieden werden,

3 b) als verschieden angesehen werden?

2. Bei der Begrüßung sitzen die 12 neuen Mitarbeiter, 8 Frauen und 4 Männer, in zwei Reihen mit je 6 Stühlen.
   Wie viele Sitzanordnungen gibt es, wenn nur nach Frauen und Männern unterschieden wird, und

3 a) in jeder Reihe zwei Männer sitzen,

3 b) die 4 Männer nebeneinander sitzen?

3. Die Wahrscheinlichkeit, dass Mitarbeiter in Kaufhäusern bereit sind, auch abends zu arbeiten, sei p.

7 a) Wie groß ist im Fall $p = 0{,}8$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den 12 neuen Mitarbeitern mindestens 10 bereit sind, auch abends zu arbeiten?

4 b) Wie groß müsste p mindestens sein, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 50 % alle 12 neuen Mitarbeiter bereit sind, auch abends zu arbeiten?

5 4. 45 % aller Kunden des Kaufhauses sind männlich, 50 % aller Kunden kaufen auch abends ein. 25 % aller Kunden sind weiblich und kaufen abends nicht ein. Untersuchen Sie die folgenden Ereignisse auf Unabhängigkeit:
   M: „Ein zufällig ausgewählter Kunde ist männlich."
   A: „Ein zufällig ausgewählter Kunde kauft auch abends ein."

5. Die Kaufhausleitung will die verlängerten Öffnungszeiten nur beibehalten, wenn diese von wenigstens 40 % der Kunden gewünscht werden. Dazu werden 200 zufällig ausgewählte Kunden befragt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, irrtümlich von den verlängerten Öffnungszeiten abzugehen, soll höchstens 5 % betragen.

7 a) Ermitteln Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

5 b) Wie groß ist bei der Entscheidungsregel aus Teilaufgabe 5a die Wahrscheinlichkeit dafür, die verlängerten Öffnungszeiten beizubehalten, obwohl diese nur von 30 % der Kunden gewünscht werden?

40

BE

GM3. ANALYTISCHE GEOMETRIE

V.

In einem kartesischen Koordinatensystem bestimmen die Punkte A(0|-4|3), B(1|4|-2) und C(-2|4|1) die Ebene E.

6 1. a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC einen rechten Winkel besitzt, und berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

9 b) Ermitteln Sie die Koordinaten des Schwerpunkts S, des Umkreismittelpunkts U (Thaleskreis!) und des Höhenschnittpunkts H dieses rechtwinkligen Dreiecks ABC.
Erläutern Sie, warum die Punkte S, U und H auf einer Geraden liegen.
In welchem Verhältnis teilt U die Strecke [SH]?

5 c) Bestimmen Sie eine Gleichung der durch die Punkte A, B und C bestimmten Ebene E in Normalenform.
[mögliches Ergebnis: E: $2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2 = 0$]

2. Gegeben ist weiter die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 16 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

6 a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts T auf der Geraden g, der von A den kürzesten Abstand besitzt.
[zur Kontrolle: T(6|-1|9)]

5 b) Untersuchen Sie die gegenseitige Lage von g und E.

6 c) Berechnen Sie die Länge der Strecke [AT] und den Abstand des Punkts T von der Ebene E.
Warum steht die Gerade AT sowohl auf der Ebene E als auch auf der Geraden g senkrecht?
Fertigen Sie eine Skizze an, die die Geraden AT und g sowie die Ebene E enthält.

3 d) Geben Sie eine Gleichung der Kugel an, deren Mittelpunkt auf der Geraden g liegt und die die Ebene E in A berührt.

40

BE

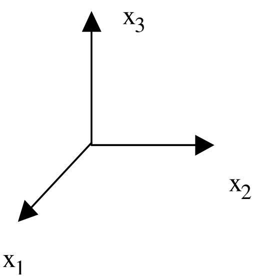
VI.

Die Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

bestimmen die Ebene E (Nachweis nicht erforderlich).
Zusätzlich ist die Ebene $H: x_1 + x_2 = 0$ gegeben.

5 1. a) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform.
[mögliches Ergebnis: E: $2x_1 - 2x_2 + x_3 - 6 = 0$]

3 b) Bestimmen Sie die Koordinaten a, b und c so, dass die Punkte A(a|0|0), B(0|b|0) und C(0|0|c) die Schnittpunkte der Ebene E mit den Koordinatenachsen sind.
Legen Sie ein Koordinatensystem an (vgl. Skizze) und tragen Sie das Dreieck ABC ein.



5 c) Die Ebenen E und H schneiden sich in der Geraden k. Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden k.

[mögliches Ergebnis: $k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}, \ \tau \in \mathbb{R}$]

6 d) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist.
Geben Sie den Fußpunkt F des Lots von dem Punkt C auf die Gerade AB an und tragen Sie das Lot und den Lotfußpunkt F in Ihre Zeichnung aus Teilaufgabe 1b ein.
Begründen Sie, dass die Strecke [CF] auf der Geraden k liegt.

4 e) Bestimmen Sie den Schnittwinkel α (auf 0,1° genau) der Geraden k und der x_3-Achse. Kennzeichnen Sie diesen Winkel in Ihrer Zeichnung.

5 f) Durch Spiegeln der Punkte A und B am Ursprung O erhält man die Punkte A' und B'. Tragen Sie diese Punkte in Ihre Zeichnung ein.
Berechnen Sie den Rauminhalt der Pyramide AB'A'BC.

3 2. a) Bestimmen Sie den Abstand eines beliebigen Punkts P(0|0|p) der x_3-Achse von der Ebene E in Abhängigkeit von p.

5 b) Bestimmen Sie die beiden Punkte der x_3-Achse, die von der x_1x_2-Ebene genauso weit entfernt sind wie von der Ebene E.
[Teilergebnis: P_1 (0|0|1,5)]

4 c) Geben Sie eine Gleichung der Kugel an, die der Pyramide AB'A'BC (vgl. Teilaufgabe 1f) einbeschrieben ist.

40

Abiturprüfung 1998

MATHEMATIK

als Grundkursfach

Arbeitszeit: 180 Minuten

Der Fachausschuss wählt je eine Aufgabe aus den Gebieten GM1, GM2 und GM3 zur Bearbeitung aus.

BE

GM1. INFINITESIMALRECHNUNG

I.

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{x}{2}\left[1+(\ln x)^2\right]$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}^+$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

Hinweis: Im Folgenden darf der Grenzwert $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} [x\,(\ln x)^n] = 0$ für $n \in \mathbb{N}$ ohne Beweis verwendet werden.

6 1. a) Zeigen Sie, dass $f'(x) = \frac{1}{2}(1+\ln x)^2$ ist, und folgern Sie daraus ohne Verwendung der zweiten Ableitung, dass G_f keinen Extrempunkt besitzt.

5 b) Ermitteln Sie das Krümmungsverhalten von G_f und weisen Sie nach, dass G_f genau einen Terrassenpunkt besitzt. Berechnen Sie dessen Koordinaten.

5 c) Untersuchen Sie das Verhalten von $f(x)$ und $f'(x)$ für $x \overset{>}{\to} 0$ und für $x \to +\infty$. Geben Sie die Wertemenge W_f der Funktion f an.

4 d) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von G_f mit der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten.

[zur Kontrolle: $(e^{-1}|e^{-1})$, $(e|e)$]

6 2. Berechnen Sie f (1,5) sowie f (4) und zeichnen Sie G_f unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse im Bereich $0 < x \leq 4$ (Längeneinheit 2 cm).

3 3. a) Weisen Sie nach, dass $F: x \mapsto \frac{x^2}{8}[2\,(\ln x)^2 - 2\ln x + 3]$ mit $x \in \mathbb{R}^+$ eine Stammfunktion von f ist.

7 b) Berechnen Sie für $0 < u < e^{-1}$ den Inhalt der Gesamtfläche A(u), die im Bereich $u \leq x \leq e$ zwischen G_f und der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten liegt. Berechnen Sie $\lim\limits_{u \to 0} A(u)$.

4 4. Die Funktion f ist umkehrbar (Nachweis nicht erforderlich). Der Graph der Umkehrfunktion von f wird mit $G_{f^{-1}}$ bezeichnet.
Geben Sie ohne Berechnung des Terms der Umkehrfunktion den Winkel an, unter dem G_f und $G_{f^{-1}}$ sich im Punkt $(e^{-1}|e^{-1})$ schneiden, und begründen Sie Ihr Ergebnis anschaulich.

40

BE

II.

Gegeben ist für $k \in \mathbb{R}^+$ die Schar von Funktionen $f_k : x \mapsto \dfrac{1}{(kx+1)^2}$ mit maximalem Definitionsbereich D_k. Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet.

7 1. a) Bestimmen Sie D_k. Untersuchen Sie das Verhalten von f_k an den Grenzen des Definitionsbereichs und geben Sie die Asymptoten von G_k an.

5 b) Zeigen Sie, dass in D_k gilt: $f_k\left(-\frac{1}{k} - x\right) = f_k\left(-\frac{1}{k} + x\right)$
Welche Symmetrieeigenschaft von G_k ist damit nachgewiesen?

5 c) Ermitteln Sie das Monotonieverhalten von f_k.

6 d) Zeigen Sie, dass alle Graphen der Schar genau einen gemeinsamen Punkt P haben, und stellen Sie eine Gleichung der Tangente t_k im Punkt P auf.

[Teilergebnis: P(0|1)]

Im Folgenden sei k = 0,5.

7 2. Berechnen Sie die Abszissen der Punkte von $G_{0,5}$, deren Ordinate den Wert 4 hat. Zeichnen Sie $G_{0,5}$ sowie $t_{0,5}$ (vgl. Teilaufgabe 1d) unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse im Bereich $-8 \le x \le 4$ (Längeneinheit 1 cm).

3 3. a) Zeigen Sie, dass $F: \; x \mapsto \dfrac{-4}{x+2}$ mit $D_F = D_{0,5}$ eine Stammfunktion von $f_{0,5}$ ist.

3 b) Ermitteln Sie die obere Integrationsgrenze t so, dass $\int_0^t f_{0,5}(x)dx = 1$ ist.

4 c) Der Graph $G_{0,5}$, die x-Achse, die Gerade x = 2 und die Gerade x = u (u >2) schließen ein Flächenstück vom Inhalt A(u) ein.
Berechnen Sie $\lim\limits_{u \to +\infty} A(u)$.

40

BE

GM2. WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG/STATISTIK

III.

In einer Fernsehshow werden Spiele mit 7 Kandidaten durchgeführt.

4 1. Da erfahrungsgemäß ein eingeladener Kandidat mit einer Wahrscheinlichkeit von 5 % nicht zur Sendung erscheint, werden insgesamt 9 Personen eingeladen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind bei der Sendung mindestens 7 Kandidaten anwesend?

2. Bei der Begrüßung sitzen die 7 Kandidaten, 4 Frauen und 3 Männer, in einer Reihe. Wie viele Sitzanordnungen gibt es, wenn hinsichtlich der Personen unterschieden wird und

3 a) die beiden Randplätze von Männern besetzt werden sollen,

3 b) sich in der Reihe Männer und Frauen stets abwechseln sollen?

Die Spiele werden mit einer "Glückswand" durchgeführt. Diese besteht aus 20 Feldern, auf die - zunächst unsichtbar - zufällig fünfmal die Zahl 200, viermal die Zahl 500 und dreimal die Zahl 1000 verteilt werden. Die übrigen Felder bleiben leer.

4 3. Wie viele derartige Verteilungen gibt es?

4. In der ersten Spielrunde decken die Kandidaten bei jedem Versuch zwei Felder zugleich auf. Ein Versuch gilt als erfolgreich, wenn dabei zwei gleiche Zahlen erscheinen.

5 a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit verläuft ein Versuch erfolgreich?
[Ergebnis: 0,1]

6 b) Ein Kandidat, der bei 3 Versuchen nicht wenigstens einmal erfolgreich ist, scheidet aus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit scheiden genau 5 von den 7 Kandidaten aus?

5. In der Endrunde darf ein Kandidat nacheinander beliebig viele der 20 Felder aufdecken. Erscheint ein Leerfeld, so hat er verloren. Anderenfalls gewinnt er die Summe der aufgedeckten Zahlen als DM-Betrag.

2 a) Ein Kandidat hat bereits zwei Zahlenfelder aufgedeckt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit geht er leer aus, wenn er noch ein drittes Feld aufdeckt?

7 b) Untersuchen Sie die folgenden Ereignisse auf Unabhängigkeit:
A: „Das erste aufgedeckte Feld zeigt die Zahl 200."
B: „Die ersten beiden aufgedeckten Felder ergeben eine Summe größer als 1000."

6 6. Kandidat K behauptet, hellseherische Fähigkeiten zu besitzen und Zahlenfelder mit erhöhter Wahrscheinlichkeit zu erkennen. In einem Test muss er 200-mal versuchen, ein Tausenderfeld zu finden. Nach jedem Versuch werden die Zahlen neu verteilt. K sollen mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 10 % irrtümlich hellseherische Fähigkeiten zugebilligt werden.

40 Ermitteln Sie die Entscheidungsregel.

BE

IV.

In einem Kaufhaus sollen auf Grund verlängerter Ladenschlusszeiten 12 neue Mitarbeiter eingestellt werden.

1. In Abteilung A sind 5 Stellen zu besetzen, in Abteilung B 7 Stellen. Für Abteilung A bewerben sich 8 und für Abteilung B 10 Personen.
   Wie viele Möglichkeiten gibt es, die offenen Stellen zu besetzen, wenn die Stellen innerhalb jeder Abteilung

3 a) nicht unterschieden werden,

3 b) als verschieden angesehen werden?

2. Bei der Begrüßung sitzen die 12 neuen Mitarbeiter, 8 Frauen und 4 Männer, in zwei Reihen mit je 6 Stühlen.
   Wie viele Sitzanordnungen gibt es, wenn nur nach Frauen und Männern unterschieden wird, und

3 a) in jeder Reihe zwei Männer sitzen,

3 b) die 4 Männer nebeneinander sitzen?

3. Die Wahrscheinlichkeit, dass Mitarbeiter in Kaufhäusern bereit sind, auch abends zu arbeiten, sei p.

7 a) Wie groß ist im Fall p = 0,8 die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den 12 neuen Mitarbeitern mindestens 10 bereit sind, auch abends zu arbeiten?

4 b) Wie groß müsste p mindestens sein, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 50 % alle 12 neuen Mitarbeiter bereit sind, auch abends zu arbeiten?

5 4. 45 % aller Kunden des Kaufhauses sind männlich, 50 % aller Kunden kaufen auch abends ein. 25 % aller Kunden sind weiblich und kaufen abends nicht ein. Untersuchen Sie die folgenden Ereignisse auf Unabhängigkeit:
   M: „Ein zufällig ausgewählter Kunde ist männlich.“
   A: „Ein zufällig ausgewählter Kunde kauft auch abends ein.“

5. Die Kaufhausleitung will die verlängerten Öffnungszeiten nur beibehalten, wenn diese von wenigstens 40 % der Kunden gewünscht werden. Dazu werden 200 zufällig ausgewählte Kunden befragt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, irrtümlich von den verlängerten Öffnungszeiten abzugehen, soll höchstens 5 % betragen.

7 a) Ermitteln Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

5 b) Wie groß ist bei der Entscheidungsregel aus Teilaufgabe 5a die Wahrscheinlichkeit dafür, die verlängerten Öffnungszeiten beizubehalten, obwohl diese nur von 30 % der Kunden gewünscht werden?

40

BE

GM3. ANALYTISCHE GEOMETRIE

V.

In einem kartesischen Koordinatensystem bestimmen die Punkte A(0|-4|3), B(1|4|-2) und C(-2|4|1) die Ebene E.

6 1. a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC einen rechten Winkel besitzt, und berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

9 b) Ermitteln Sie die Koordinaten des Schwerpunkts S, des Umkreismittelpunkts U (Thaleskreis!) und des Höhenschnittpunkts H dieses rechtwinkligen Dreiecks ABC.
Erläutern Sie, warum die Punkte S, U und H auf einer Geraden liegen.
In welchem Verhältnis teilt U die Strecke [SH]?

5 c) Bestimmen Sie eine Gleichung der durch die Punkte A, B und C bestimmten Ebene E in Normalenform.
[mögliches Ergebnis: E: $2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2 = 0$]

2. Gegeben ist weiter die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 16 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

6 a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts T auf der Geraden g, der von A den kürzesten Abstand besitzt.
[zur Kontrolle: T(6|-1|9)]

5 b) Untersuchen Sie die gegenseitige Lage von g und E.

6 c) Berechnen Sie die Länge der Strecke [AT] und den Abstand des Punkts T von der Ebene E.
Warum steht die Gerade AT sowohl auf der Ebene E als auch auf der Geraden g senkrecht?
Fertigen Sie eine Skizze an, die die Geraden AT und g sowie die Ebene E enthält.

3 d) Geben Sie eine Gleichung der Kugel an, deren Mittelpunkt auf der Geraden g liegt und die die Ebene E in A berührt.

40

BE

VI.

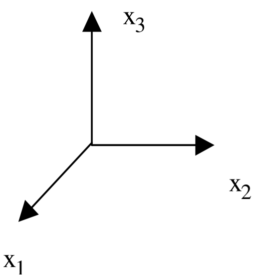
Die Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

bestimmen die Ebene E (Nachweis nicht erforderlich).
Zusätzlich ist die Ebene $H: x_1 + x_2 = 0$ gegeben.

5 1. a) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform.

[mögliches Ergebnis: E: $2x_1 - 2x_2 + x_3 - 6 = 0$]

3 b) Bestimmen Sie die Koordinaten a, b und c so, dass die Punkte A(a|0|0), B(0|b|0) und C(0|0|c) die Schnittpunkte der Ebene E mit den Koordinatenachsen sind.
Legen Sie ein Koordinatensystem an (vgl. Skizze) und tragen Sie das Dreieck ABC ein.



5 c) Die Ebenen E und H schneiden sich in der Geraden k. Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden k.

[mögliches Ergebnis: $k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\tau \in \mathbb{R}$]

6 d) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist.
Geben Sie den Fußpunkt F des Lots von dem Punkt C auf die Gerade AB an und tragen Sie das Lot und den Lotfußpunkt F in Ihre Zeichnung aus Teilaufgabe 1b ein.
Begründen Sie, dass die Strecke [CF] auf der Geraden k liegt.

4 e) Bestimmen Sie den Schnittwinkel α (auf 0,1° genau) der Geraden k und der x_3-Achse. Kennzeichnen Sie diesen Winkel in Ihrer Zeichnung.

5 f) Durch Spiegeln der Punkte A und B am Ursprung O erhält man die Punkte A' und B'. Tragen Sie diese Punkte in Ihre Zeichnung ein.
Berechnen Sie den Rauminhalt der Pyramide AB'A'BC.

3 2. a) Bestimmen Sie den Abstand eines beliebigen Punkts P(0|0|p) der x_3-Achse von der Ebene E in Abhängigkeit von p.

5 b) Bestimmen Sie die beiden Punkte der x_3-Achse, die von der x_1x_2-Ebene genauso weit entfernt sind wie von der Ebene E.

[Teilergebnis: P_1 (0|0|1,5)]

4 c) Geben Sie eine Gleichung der Kugel an, die der Pyramide AB'A'BC (vgl. Teilaufgabe 1f) einbeschrieben ist.

40

Abiturprüfung 1998

MATHEMATIK

als Grundkursfach

Arbeitszeit: 180 Minuten

Der Fachausschuss wählt je eine Aufgabe aus den Gebieten
GM1, GM2 und GM3 zur Bearbeitung aus.

BE	

GM1. INFINITESIMALRECHNUNG

I.

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{x}{2}\left[1+(\ln x)^2\right]$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}^+$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

Hinweis: Im Folgenden darf der Grenzwert $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} [x(\ln x)^n] = 0$ für $n \in \mathbb{N}$ ohne Beweis verwendet werden.

6 1. a) Zeigen Sie, dass $f'(x) = \frac{1}{2}(1+\ln x)^2$ ist, und folgern Sie daraus ohne Verwendung der zweiten Ableitung, dass G_f keinen Extrempunkt besitzt.

5 b) Ermitteln Sie das Krümmungsverhalten von G_f und weisen Sie nach, dass G_f genau einen Terrassenpunkt besitzt. Berechnen Sie dessen Koordinaten.

5 c) Untersuchen Sie das Verhalten von $f(x)$ und $f'(x)$ für $x \overset{>}{\to} 0$ und für $x \to +\infty$. Geben Sie die Wertemenge W_f der Funktion f an.

4 d) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von G_f mit der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten.

[zur Kontrolle: $(e^{-1}|e^{-1})$, $(e|e)$]

6 2. Berechnen Sie f (1,5) sowie f (4) und zeichnen Sie G_f unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse im Bereich $0 < x \leq 4$ (Längeneinheit 2 cm).

3 3. a) Weisen Sie nach, dass $F: x \mapsto \frac{x^2}{8}[2(\ln x)^2 - 2\ln x + 3]$ mit $x \in \mathbb{R}^+$ eine Stammfunktion von f ist.

7 b) Berechnen Sie für $0 < u < e^{-1}$ den Inhalt der Gesamtfläche A(u), die im Bereich $u \leq x \leq e$ zwischen G_f und der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten liegt. Berechnen Sie $\lim\limits_{u \to 0} A(u)$.

4 4. Die Funktion f ist umkehrbar (Nachweis nicht erforderlich). Der Graph der Umkehrfunktion von f wird mit $G_{f^{-1}}$ bezeichnet.
Geben Sie ohne Berechnung des Terms der Umkehrfunktion den Winkel an, unter dem G_f und $G_{f^{-1}}$ sich im Punkt $(e^{-1}|e^{-1})$ schneiden, und begründen Sie Ihr Ergebnis anschaulich.

40

BE

II.

Gegeben ist für $k \in \mathbb{R}^+$ die Schar von Funktionen $f_k : x \mapsto \dfrac{1}{(kx+1)^2}$ mit maximalem Definitionsbereich D_k. Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet.

7 1. a) Bestimmen Sie D_k. Untersuchen Sie das Verhalten von f_k an den Grenzen des Definitionsbereichs und geben Sie die Asymptoten von G_k an.

5 b) Zeigen Sie, dass in D_k gilt: $f_k\left(-\frac{1}{k} - x\right) = f_k\left(-\frac{1}{k} + x\right)$
Welche Symmetrieeigenschaft von G_k ist damit nachgewiesen?

5 c) Ermitteln Sie das Monotonieverhalten von f_k.

6 d) Zeigen Sie, dass alle Graphen der Schar genau einen gemeinsamen Punkt P haben, und stellen Sie eine Gleichung der Tangente t_k im Punkt P auf.

[Teilergebnis: P(0|1)]

Im Folgenden sei k = 0,5.

7 2. Berechnen Sie die Abszissen der Punkte von $G_{0,5}$, deren Ordinate den Wert 4 hat. Zeichnen Sie $G_{0,5}$ sowie $t_{0,5}$ (vgl. Teilaufgabe 1d) unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse im Bereich $-8 \le x \le 4$ (Längeneinheit 1 cm).

3 3. a) Zeigen Sie, dass $F: \; x \mapsto \dfrac{-4}{x+2}$ mit $D_F = D_{0,5}$ eine Stammfunktion von $f_{0,5}$ ist.

3 b) Ermitteln Sie die obere Integrationsgrenze t so, dass $\int_0^t f_{0,5}(x)\,dx = 1$ ist.

4 c) Der Graph $G_{0,5}$, die x-Achse, die Gerade x = 2 und die Gerade x = u (u >2) schließen ein Flächenstück vom Inhalt A(u) ein.
Berechnen Sie $\lim\limits_{u \to +\infty} A(u)$.

40

BE

GM2. WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG/STATISTIK

III.

In einer Fernsehshow werden Spiele mit 7 Kandidaten durchgeführt.

4 1. Da erfahrungsgemäß ein eingeladener Kandidat mit einer Wahrscheinlichkeit von 5 % nicht zur Sendung erscheint, werden insgesamt 9 Personen eingeladen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind bei der Sendung mindestens 7 Kandidaten anwesend?

2. Bei der Begrüßung sitzen die 7 Kandidaten, 4 Frauen und 3 Männer, in einer Reihe. Wie viele Sitzanordnungen gibt es, wenn hinsichtlich der Personen unterschieden wird und

3 a) die beiden Randplätze von Männern besetzt werden sollen,

3 b) sich in der Reihe Männer und Frauen stets abwechseln sollen?

Die Spiele werden mit einer “Glückswand” durchgeführt. Diese besteht aus 20 Feldern, auf die - zunächst unsichtbar - zufällig fünfmal die Zahl 200, viermal die Zahl 500 und dreimal die Zahl 1000 verteilt werden. Die übrigen Felder bleiben leer.

4 3. Wie viele derartige Verteilungen gibt es?

4. In der ersten Spielrunde decken die Kandidaten bei jedem Versuch zwei Felder zugleich auf. Ein Versuch gilt als erfolgreich, wenn dabei zwei gleiche Zahlen erscheinen.

5 a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit verläuft ein Versuch erfolgreich? [Ergebnis: 0,1]

6 b) Ein Kandidat, der bei 3 Versuchen nicht wenigstens einmal erfolgreich ist, scheidet aus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit scheiden genau 5 von den 7 Kandidaten aus?

5. In der Endrunde darf ein Kandidat nacheinander beliebig viele der 20 Felder aufdecken. Erscheint ein Leerfeld, so hat er verloren. Anderenfalls gewinnt er die Summe der aufgedeckten Zahlen als DM-Betrag.

2 a) Ein Kandidat hat bereits zwei Zahlenfelder aufgedeckt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit geht er leer aus, wenn er noch ein drittes Feld aufdeckt?

7 b) Untersuchen Sie die folgenden Ereignisse auf Unabhängigkeit:
A: „Das erste aufgedeckte Feld zeigt die Zahl 200.“
B: „Die ersten beiden aufgedeckten Felder ergeben eine Summe größer als 1000.“

6 6. Kandidat K behauptet, hellseherische Fähigkeiten zu besitzen und Zahlenfelder mit erhöhter Wahrscheinlichkeit zu erkennen. In einem Test muss er 200-mal versuchen, ein Tausenderfeld zu finden. Nach jedem Versuch werden die Zahlen neu verteilt. K sollen mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 10 % irrtümlich hellseherische Fähigkeiten zugebilligt werden. Ermitteln Sie die Entscheidungsregel.

40

BE

IV.

In einem Kaufhaus sollen auf Grund verlängerter Ladenschlusszeiten 12 neue Mitarbeiter eingestellt werden.

1. In Abteilung A sind 5 Stellen zu besetzen, in Abteilung B 7 Stellen. Für Abteilung A bewerben sich 8 und für Abteilung B 10 Personen.
   Wie viele Möglichkeiten gibt es, die offenen Stellen zu besetzen, wenn die Stellen innerhalb jeder Abteilung

3 a) nicht unterschieden werden,

3 b) als verschieden angesehen werden?

2. Bei der Begrüßung sitzen die 12 neuen Mitarbeiter, 8 Frauen und 4 Männer, in zwei Reihen mit je 6 Stühlen.
   Wie viele Sitzanordnungen gibt es, wenn nur nach Frauen und Männern unterschieden wird, und

3 a) in jeder Reihe zwei Männer sitzen,

3 b) die 4 Männer nebeneinander sitzen?

3. Die Wahrscheinlichkeit, dass Mitarbeiter in Kaufhäusern bereit sind, auch abends zu arbeiten, sei p.

7 a) Wie groß ist im Fall p = 0,8 die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den 12 neuen Mitarbeitern mindestens 10 bereit sind, auch abends zu arbeiten?

4 b) Wie groß müsste p mindestens sein, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 50 % alle 12 neuen Mitarbeiter bereit sind, auch abends zu arbeiten?

5 4. 45 % aller Kunden des Kaufhauses sind männlich, 50 % aller Kunden kaufen auch abends ein. 25 % aller Kunden sind weiblich und kaufen abends nicht ein. Untersuchen Sie die folgenden Ereignisse auf Unabhängigkeit:
M: „Ein zufällig ausgewählter Kunde ist männlich."
A: „Ein zufällig ausgewählter Kunde kauft auch abends ein."

5. Die Kaufhausleitung will die verlängerten Öffnungszeiten nur beibehalten, wenn diese von wenigstens 40 % der Kunden gewünscht werden. Dazu werden 200 zufällig ausgewählte Kunden befragt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, irrtümlich von den verlängerten Öffnungszeiten abzugehen, soll höchstens 5 % betragen.

7 a) Ermitteln Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

5 b) Wie groß ist bei der Entscheidungsregel aus Teilaufgabe 5a die Wahrscheinlichkeit dafür, die verlängerten Öffnungszeiten beizubehalten, obwohl diese nur von 30 % der Kunden gewünscht werden?

40

BE

GM3. ANALYTISCHE GEOMETRIE

V.

In einem kartesischen Koordinatensystem bestimmen die Punkte A(0|-4|3), B(1|4|-2) und C(-2|4|1) die Ebene E.

6 1. a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC einen rechten Winkel besitzt, und berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

9 b) Ermitteln Sie die Koordinaten des Schwerpunkts S, des Umkreismittelpunkts U (Thaleskreis!) und des Höhenschnittpunkts H dieses rechtwinkligen Dreiecks ABC.
Erläutern Sie, warum die Punkte S, U und H auf einer Geraden liegen.
In welchem Verhältnis teilt U die Strecke [SH]?

5 c) Bestimmen Sie eine Gleichung der durch die Punkte A, B und C bestimmten Ebene E in Normalenform.
[mögliches Ergebnis: E: $2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2 = 0$]

2. Gegeben ist weiter die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 16 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

6 a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts T auf der Geraden g, der von A den kürzesten Abstand besitzt.
[zur Kontrolle: T(6|-1|9)]

5 b) Untersuchen Sie die gegenseitige Lage von g und E.

6 c) Berechnen Sie die Länge der Strecke [AT] und den Abstand des Punkts T von der Ebene E.
Warum steht die Gerade AT sowohl auf der Ebene E als auch auf der Geraden g senkrecht?
Fertigen Sie eine Skizze an, die die Geraden AT und g sowie die Ebene E enthält.

3 d) Geben Sie eine Gleichung der Kugel an, deren Mittelpunkt auf der Geraden g liegt und die die Ebene E in A berührt.

40

BE

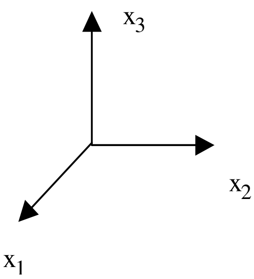
VI.

Die Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

bestimmen die Ebene E (Nachweis nicht erforderlich).
Zusätzlich ist die Ebene $H: x_1 + x_2 = 0$ gegeben.

5 1. a) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform.
[mögliches Ergebnis: E: $2x_1 - 2x_2 + x_3 - 6 = 0$]

3 b) Bestimmen Sie die Koordinaten a, b und c so, dass die Punkte A(a|0|0), B(0|b|0) und C(0|0|c) die Schnittpunkte der Ebene E mit den Koordinatenachsen sind.
Legen Sie ein Koordinatensystem an (vgl. Skizze) und tragen Sie das Dreieck ABC ein.



5 c) Die Ebenen E und H schneiden sich in der Geraden k. Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden k.

[mögliches Ergebnis: $k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\tau \in \mathbb{R}$]

6 d) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist.
Geben Sie den Fußpunkt F des Lots von dem Punkt C auf die Gerade AB an und tragen Sie das Lot und den Lotfußpunkt F in Ihre Zeichnung aus Teilaufgabe 1b ein.
Begründen Sie, dass die Strecke [CF] auf der Geraden k liegt.

4 e) Bestimmen Sie den Schnittwinkel α (auf 0,1° genau) der Geraden k und der x_3-Achse. Kennzeichnen Sie diesen Winkel in Ihrer Zeichnung.

5 f) Durch Spiegeln der Punkte A und B am Ursprung O erhält man die Punkte A' und B'. Tragen Sie diese Punkte in Ihre Zeichnung ein.
Berechnen Sie den Rauminhalt der Pyramide AB'A'BC.

3 2. a) Bestimmen Sie den Abstand eines beliebigen Punkts P(0|0|p) der x_3-Achse von der Ebene E in Abhängigkeit von p.

5 b) Bestimmen Sie die beiden Punkte der x_3-Achse, die von der x_1x_2-Ebene genauso weit entfernt sind wie von der Ebene E.
[Teilergebnis: P_1 (0|0|1,5)]

4 c) Geben Sie eine Gleichung der Kugel an, die der Pyramide AB'A'BC (vgl. Teilaufgabe 1f) einbeschrieben ist.

40