

# **Abiturprüfung 2010**

## **MATHEMATIK**

als Grundkursfach

**Arbeitszeit: 180 Minuten**

Der Fachausschuss wählt je eine Aufgabe aus den Gebieten  
GM1, GM2 und GM3 zur Bearbeitung aus.



## GM1. INFINITESIMALRECHNUNG

## I.

BE

Gegeben ist für  $k \in \mathbb{R}^+$  die Schar von Funktionen  $f_k : x \mapsto 1 - \frac{2k}{e^x + k}$  mit dem maximalen Definitionsbereich  $D_k$ . Der Graph von  $f_k$  wird mit  $G_k$  bezeichnet.

5 1. a) Geben Sie den Definitionsbereich  $D_k$  an. Bestimmen Sie das Verhalten von  $f_k$  für  $x \rightarrow -\infty$  und für  $x \rightarrow +\infty$  und geben Sie die Gleichungen der Asymptoten von  $G_k$  an.

4 b) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von  $G_k$ .

$$[\text{zur Kontrolle: } f'_k(x) = \frac{2ke^x}{(e^x + k)^2}]$$

4 c) Zeigen Sie, dass  $G_k$  die x-Achse nur im Punkt  $S_k(\ln k | 0)$  schneidet. Die Tangente an  $G_k$  im Punkt  $S_k$  wird mit  $t_k$  bezeichnet. Begründen Sie, dass alle Tangenten  $t_k$  parallel zueinander sind.

4 d) Zeigen Sie, dass sich die Graphen  $G_1$  und  $G_8$  nicht schneiden.

6 e) Berechnen Sie  $f_1(-1)$ ,  $f_1(1)$ ,  $f_8(1)$  und  $f_8(3)$ . Zeichnen Sie die Graphen  $G_1$  und  $G_8$ , deren Asymptoten sowie die Tangenten  $t_1$  und  $t_8$  unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse in ein Koordinatensystem ein.

3 f) Begründen Sie, dass durch jeden Punkt der x-Achse ein Graph  $G_k$  verläuft.

5 g) Zeigen Sie, dass die Funktion  $F_k : x \mapsto 2 \cdot \ln(e^x + k) - x$  mit  $x \in D_k$  eine Stammfunktion von  $f_k$  ist.

5 h)  $G_8$  und die Koordinatenachsen begrenzen im IV. Quadranten ein Flächenstück. Berechnen Sie dessen Inhalt.

4 2. Lässt man für den Parameter  $k$  auch negative Werte zu, so unterscheiden sich die Graphen  $G_k$  mit  $k \in \mathbb{R}^-$  von den Graphen  $G_k$  mit  $k \in \mathbb{R}^+$ . Geben Sie zwei grundsätzliche Unterschiede an und begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

40

BE

## II.

Gegeben ist die Funktion  $f : x \mapsto \frac{1-x}{1+x}$  mit dem Definitionsbereich

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ . Der Graph von  $f$  wird mit  $G_f$  bezeichnet.

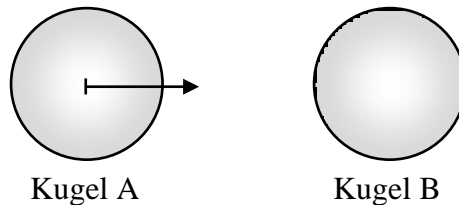
- 5 1. a) Untersuchen Sie das Verhalten von  $f$  an den Rändern des Definitionsbereichs und geben Sie die Gleichungen der Asymptoten von  $G_f$  an.
- 4 b) Die Terme der gebrochen-rationalen Funktionen  $g$  und  $h$  haben den gleichen Zähler wie  $f(x)$ , aber jeweils einen anderen Nenner. Geben Sie je einen möglichen Funktionsterm für  $g$  und  $h$  an, so dass im jeweils maximalen Definitionsbereich gilt:
- Der Graph von  $g$  hat keine senkrechte Asymptote.
  - Die Funktion  $h$  hat an der Stelle  $x = -1$  eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel.
- 5 2. a) Geben Sie die Koordinaten der Achsenschnittpunkte von  $G_f$  an und untersuchen Sie das Monotonieverhalten von  $G_f$ .
- 4 b) Berechnen Sie  $f(3)$ ,  $f(-2)$  und  $f(-5)$ . Zeichnen Sie  $G_f$  sowie die Asymptoten unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse in ein Koordinatensystem ein.
- 4 3. Die Funktion  $f$  ist umkehrbar (Nachweis nicht erforderlich). Bestimmen Sie den Term der Umkehrfunktion von  $f$ .  
Was lässt sich aus dem Ergebnis hinsichtlich der Symmetrie von  $G_f$  folgern?
- 3 4. a) Bestätigen Sie, dass die Funktion  $F : x \mapsto -x + 2 \ln(x+1)$  für  $x \in ]-1; +\infty[$  eine Stammfunktion von  $f$  ist.
- 5 b) Weisen Sie durch Rechnung nach, dass  $G_f$  im I. Quadranten den Viertelkreis um den Koordinatenursprung mit Radius 1 in zwei etwa inhaltsgleiche Teilflächen zerlegt.

(Fortsetzung nächste Seite)

BE

Die Ergebnisse der Aufgaben 1 bis 3 können im Folgenden verwendet werden.

5. Eine Kugel A der Masse 1 kg bewegt sich nach rechts und stößt mit der Geschwindigkeit  $1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  elastisch und zentral auf eine gleich große ruhende Kugel B.



Die Maßzahl der Geschwindigkeit der Kugel A in  $\frac{\text{m}}{\text{s}}$  unmittelbar *nach* dem Zusammenstoß wird durch die Funktion  $v : m \mapsto \frac{1-m}{1+m}$  mit  $m \in \mathbb{R}^+$  beschrieben, wobei  $m$  für die Maßzahl der Masse der Kugel B in kg steht. Zu einer Bewegung nach rechts gehören positive Geschwindigkeiten, zu einer Bewegung nach links negative Geschwindigkeiten.

- 5 a) Berechnen Sie, mit welcher Geschwindigkeit sich Kugel A unmittelbar nach dem Stoß bewegt, wenn die Masse der Kugel B 0,6 kg beträgt. Geben Sie die Grenzwerte der Funktion  $v$  für  $m \rightarrow 0$  sowie  $m \rightarrow +\infty$  an und machen Sie für diese beiden Grenzfälle jeweils den Bewegungsablauf der Kugel A im Sachzusammenhang plausibel.
- 5 b) Ermitteln Sie, für welche Werte von  $m$  sich Kugel A unmittelbar nach dem Stoß nach rechts bewegt. Berechnen Sie, für welchen Wert von  $m$  sich die Kugel A unmittelbar nach dem Stoß mit  $0,9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  nach links bewegt.

40

## GM2. WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG/STATISTIK

BE	III.
	Die Klasse 7a eines Gymnasiums fährt ins Skilager. Alle 11 Jungen und alle 18 Mädchen der Klasse nehmen an dem einwöchigen Skikurs teil.
4	1. In der Unterkunft stehen für die 18 Mädchen der Klasse ein Sechsbett-, ein Fünfbett-, ein Vierbett- und ein Dreibettzimmer zur Verfügung. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, die Mädchen so auf die vier Zimmer zu verteilen, dass jedes Zimmer voll besetzt ist?
	2. Am Ankunftstag müssen die Schülerinnen und Schüler ihren „Pistenführerschein“ in Form eines Multiple-Choice-Tests machen. Zu jeder der 10 vorgelegten Fragen gibt es gleich viele Antwortmöglichkeiten, von denen jeweils genau eine richtig ist; pro Frage ist genau eine der Antwortmöglichkeiten anzukreuzen. Der Test gilt als bestanden, wenn mehr als die Hälfte der Fragen korrekt beantwortet wurde. Christoph wählt bei jeder Frage genau eine der Antwortmöglichkeiten rein zufällig aus und kreuzt diese an. Betrachtet wird das Ereignis A: „Christoph besteht den Pistenführerschein.“
4	a) Berechnen Sie $P(A)$ für den Fall, dass bei jeder Frage 3 Antwortmöglichkeiten vorgegeben sind.
5	b) Wie viele Antwortmöglichkeiten je Frage müssen mindestens vorgegeben werden, damit $P(A)$ unter 1 % liegt? Begründen Sie Ihre Antwort mit geeigneten Werten aus dem stochastischen Tafelwerk.
	3. Erfahrungsgemäß beträgt das Risiko, sich während eines einwöchigen Skikurses zu verletzen, für einen Jungen 5 % und für ein Mädchen 2 %.
3	a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit verletzen sich innerhalb der Kurswoche genau 2 der 11 Jungen?
2	b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich innerhalb der Kurswoche niemand aus der Klasse 7a verletzt.
5	c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich innerhalb der Kurswoche höchstens ein Mitglied der Klasse 7a verletzt?

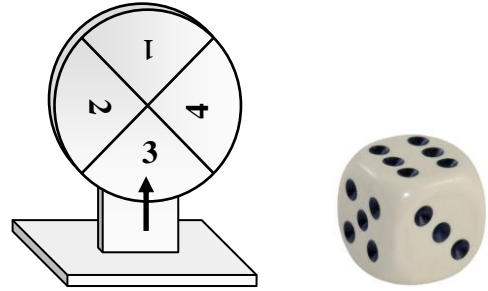
(Fortsetzung nächste Seite)

BE	
5	<p>4. „Alkohol auf der Piste“ erhöht bekanntlich das Verletzungsrisiko. Nach einer groß angelegten Aufklärungskampagne vermutet die ortsansässige Bergwacht, dass im Skigebiet der Anteil <math>p</math> aller Erwachsenen, die auf Alkoholkonsum beim Wintersport verzichten, mindestens 80 % beträgt. Die Bergwacht will die Nullhypothese <math>H_0: p \geq 0,8</math> auf dem Signifikanzniveau 5 % testen. Dazu wird bei 200 zufällig ausgewählten erwachsenen Wintersportlern ein Alkoholtest durchgeführt. Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel mit einem möglichst großen Ablehnungsbereich.</p>
5	<p>5. Von einer Bergstation führen zwei Abfahrten ins Tal, eine einfache „blaue“ und eine anspruchsvolle „schwarze“. Im Auftrag der ortsansässigen Skischule wird untersucht, ob die Wahl der Abfahrt geschlechtsabhängig ist. Eine über mehrere Wochen erstellte Statistik über die von der Bergstation abfahrenden Personen zeigt, dass 45 % unter ihnen weiblich sind; 22 % unter ihnen sind männlich und entscheiden sich für die schwarze Abfahrt, 27 % unter ihnen sind weiblich und wählen die blaue Abfahrt. Eine in der Statistik erfasste Person wird zufällig ausgewählt. Untersuchen Sie die beiden Ereignisse „Die ausgewählte Person ist männlich“ und „Die ausgewählte Person entscheidet sich für die blaue Abfahrt“ auf stochastische Unabhängigkeit.</p>
3	<p>6. Bei einem Abfahrtslauf der fortgeschrittenen Skifahrerinnen und Skifahrer der Klasse 7a werden die Startnummern von 1 bis 20 zufällig von den 20 Teilnehmern gezogen. Unter ihnen sind die 3 Mädchen aus dem Dreibettzimmer. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese 3 Mädchen</p>
4	<p>a) unter den ersten zehn Startern sind?</p>
4	<p>b) aufeinander folgende Startnummern ziehen?</p>
40	

BE

## IV.

Das Spiel „Gewinn mit Vier“ besteht aus dem einmaligen Drehen des abgebildeten Laplace-Glücksrades mit 4 gleich großen Sektoren und dem einmaligen Werfen eines üblichen Laplace-Würfels.



7

1. Es werden die beiden Ereignisse

A: „Beim Drehen des Glücksrades wird die Zahl 4 erzielt“ und

B: „Beim Werfen des Würfels wird die Zahl 4 erzielt“

betrachtet.

Drücken Sie die Ereignisse

C: „Keines der beiden Ereignisse A und B tritt ein“ und

D: „Höchstens eines der beiden Ereignisse A und B tritt ein“

durch A und B unter Verwendung der Mengenschreibweise aus und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten von C und D.

In einer Spielshow spielt jeder Kandidat das Spiel „Gewinn mit Vier“ genau einmal.

2. Ein Kandidat erhält nur dann einen Kleingewinn, wenn er beim Spiel „Gewinn mit Vier“ genau einmal die Zahl 4 erzielt.

3

a) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür  $\frac{1}{3}$  beträgt.

3

b) Für die Show wurden 5 Kleingewinne bereitgestellt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese ausreichen, wenn 15 Kandidaten am Spiel teilnehmen?

5

c) Wie viele Kandidaten müssen in der Show mindestens „Gewinn mit Vier“ spielen, damit die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Kandidat einen Kleingewinn erhält, mehr als 99 % beträgt?

4

3. Ein Kandidat wird zur nächsten Show erneut eingeladen, wenn beim Spiel „Gewinn mit Vier“ die Summe der beiden von ihm erzielten Zahlen den Wert 4 ergibt. Berechnen Sie die zugehörige Wahrscheinlichkeit.

(Fortsetzung nächste Seite)



BE

- 6 4. Erzielt ein Kandidat beim Spiel „Gewinn mit Vier“ zweimal die Zahl 4, darf er an die Glückswand. An dieser sind zwölf Felder in zufälliger Anordnung beschriftet, und zwar je drei mit 0 €, 100 €, 500 € bzw. 1000 €. Die folgende Abbildung zeigt eine mögliche Anordnung der Geldbeträge an der Glückswand.

100 €	0 €	500 €	100 €
0 €	1000 €	500 €	100 €
500 €	0 €	1000 €	1000 €

Die Felder sind zunächst verdeckt. Ein Spieler darf vier Felder aufdecken und erhält die Summe der aufgedeckten Geldbeträge. Wie groß ist für einen Kandidaten die Wahrscheinlichkeit, dass er im Rahmen einer Show an die Glückswand darf und dort mindestens 3000 € gewinnt?

- 4 5. Es wird vermutet, dass die Wahrscheinlichkeit für die Augenzahl 4 beim Würfel nicht mehr  $\frac{1}{6}$  beträgt, sondern höher ist. Um zu entscheiden, ob der Würfel ausgetauscht werden muss, wird er 100-mal geworfen. Der Würfel soll ausgetauscht werden, wenn die Augenzahl 4 dabei mehr als 20-mal erscheint. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Laplace-Würfel irrtümlich ausgetauscht wird?
6. Die Wahrscheinlichkeit für einen Kleingewinn (vgl. Aufgabe 2) soll von  $\frac{1}{3}$  auf  $\frac{1}{4}$  reduziert werden. Dazu verkleinert man den Sektor mit der Zahl 4 auf dem Glücksrad. Die Sektoren der anderen Zahlen werden so angepasst, dass die Winkel aller Sektoren zusammen wieder  $360^\circ$  ergeben. Der Laplace-Würfel bleibt unverändert.
- 5 a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit  $p$ , mit der die Zahl 4 nun beim Drehen des Glücksrades erzielt wird, und geben Sie die Größe des Winkels des zugehörigen Sektors an.
- 3 b) Begründen Sie, dass durch diese Änderungen am Glücksrad die Wahrscheinlichkeit für den Summenwert 4 gegenüber der Ausgangssituation (vgl. Aufgabe 3) größer wird.

40

## GM3. ANALYTISCHE GEOMETRIE

## V.

BE

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte  $A(-3|2|-1)$ ,  $B(-1|-1|-3)$  und  $S(3|7|-11)$  sowie die Geraden  $g = AB$  und

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}, \text{ gegeben.}$$

- 8 1. a) Zeigen Sie, dass die Geraden  $g$  und  $h$  echt parallel zueinander sind. Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene  $E$ , die die Geraden  $g$  und  $h$  enthält, in Normalenform.

$$[\text{mögliches Ergebnis: } E: x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 3 = 0]$$

- 6 b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Fußpunktes  $F$  des Lotes vom Punkt  $S$  auf die Ebene  $E$  sowie den Abstand  $d$  des Punktes  $S$  von der Ebene  $E$ .

$$[\text{Ergebnis: } F = B; d = 12]$$

- 5 c) Bestimmen Sie die Größe der Innenwinkel des Dreiecks  $ABS$ .

- 5 d) Berechnen Sie den Abstand  $d(g, h)$  der Geraden  $g$  und  $h$ .

$$[\text{Ergebnis: } d(g, h) = 3\sqrt{17}]$$

2. Lässt man das Dreieck  $ABS$  um die Achse  $BS$  rotieren, so entsteht als Rotationskörper ein Kegel  $K_1$ .

- 4 a) Berechnen Sie das Volumen von  $K_1$ .

- 3 b) Untersuchen Sie, ob die Gerade  $h$  mit dem Kegel  $K_1$  gemeinsame Punkte besitzt.

- 5 c) Eine Ebene  $E'$ , die parallel zur Ebene  $E$  liegt, zerlegt den Kegel  $K_1$  in einen Kegel  $K_2$  und einen Kegelsumpf. Die Höhe des Kegelsumpfs beträgt ein Drittel der Höhe des Gesamtkegels  $K_1$ . Berechnen Sie den prozentualen Anteil des Volumens des Kegelsumpfs am Volumen des Kegels  $K_1$ .

- 4 d) Gegeben ist ein Punkt  $P$ , dessen Abstand von der Ebene  $E$  kleiner als 12 ist. Es soll entschieden werden, ob der Punkt  $P$  auf der Mantelfläche des Kegels  $K_1$  liegt. Beschreiben Sie hierfür ein mathematisches Vorgehen unter der Annahme, dass die Koordinaten von  $P$  bekannt sind.

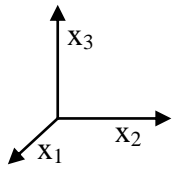
BE

## VI.

In einem kartesischen Koordinatensystem mit Ursprung  $O$  sind die Punkte  $A(7|5|1)$ ,  $B(2|-5|6)$  und die Gerade  $g: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , gegeben.

- 2 1. a) Zeigen Sie, dass der Punkt  $B$  nicht auf der Geraden  $g$  liegt.  
 6 b) Die Ebene  $E$  enthält den Punkt  $B$  und die Gerade  $g$ . Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene  $E$  in Normalenform. Welche besondere Lage im Koordinatensystem hat die Ebene  $E$ ?
- [mögliches Ergebnis:  $2x_1 - x_2 - 9 = 0$ ]
- 5 c) Der Punkt  $C$  ist Fußpunkt des Lotes vom Punkt  $B$  auf die Gerade  $g$ . Berechnen Sie die Koordinaten von  $C$ .
- [Ergebnis:  $C(2|-5|1)$ ]
- 4 d)  $M$  ist der Mittelpunkt der Strecke  $[AB]$ .  $K$  ist die Kugel mit Mittelpunkt  $M$  und Radius  $\frac{1}{2}\overline{AB}$ . Begründen Sie, dass die Gerade  $g$  die Kugel  $K$  in den Punkten  $A$  und  $C$  schneidet.

2. Durch Verschiebung der Punkte  $A$ ,  $B$  und  $C$  um den Vektor  $\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  entstehen die Punkte  $A'$ ,  $B'$  und  $C'$ . Verbindet man die entsprechenden Eckpunkte der Dreiecke  $ABC$  und  $A'B'C'$ , so entsteht das Prisma  $ABCA'B'C'$ .

- 6 a) Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes  $A'$  und zeichnen Sie das Prisma  $ABCA'B'C'$  in ein Koordinatensystem ein. (vgl. Skizze; Platzbedarf: ganze Seite; Ursprung in Blattmitte)
- [Ergebnis:  $A'(3|7|1)$ ]
- 
- 7 b) Zeigen Sie, dass der Verschiebungsvektor  $\overrightarrow{AA'}$  zur Grundfläche  $ABC$  senkrecht steht, und bestimmen Sie das Volumen des Prismas.
- 6 c) Das Rechteck  $AA'B'B$  ist eine Seitenfläche des Prismas. Die Diagonalen des Rechtecks schneiden sich im Punkt  $N$ . Begründen Sie, dass alle Ecken des Prismas auf einer Kugel um  $N$  liegen.
- 4 d) Geben Sie zwei Punkte an, die zusammen mit  $C$  eine Ebene festlegen, die das Prisma in zwei volumengleiche Teile teilt. Begründen Sie Ihre Antwort.