Abiturprüfung 2003

MATHEMATIK

als Grundkursfach

Arbeitszeit: 180 Minuten

Der Fachausschuss wählt je eine Aufgabe aus den Gebieten GM1, GM2 und GM3 zur Bearbeitung aus.

Falls das Thema GM1.II gewählt wird, ist die Angabe vom Prüfling mit dem Namen zu versehen und mit abzugeben.

Name:__________________________

GM1. INFINITESIMALRECHNUNG

BE

I.

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto e^{1-x^2}$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$.
Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

4 1. a) Ermitteln Sie das Symmetrieverhalten von G_f und untersuchen Sie das Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereichs.

9 b) Bestimmen Sie Lage und Art des Extrempunktes sowie die Lage der Wendepunkte von G_f.

4 c) Berechnen Sie $f(1)$ und $f(2)$.
Zeichnen Sie den Graphen G_f im Bereich $-2 \leq x \leq 2$ unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse (Längeneinheit 2 cm).

2. Gegeben ist nun zusätzlich die Funktion $h: x \mapsto \frac{1}{f(x)}$ mit $D_h = \mathbb{R}$. Ihr Graph wird mit G_h bezeichnet.

8 a) Geben Sie die Wertemenge von h an und bestimmen Sie die Schnittpunkte von G_f und G_h.
Zeichnen Sie mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse den Graphen G_h im Bereich $-1{,}5 \leq x \leq 1{,}5$ in das obige Koordinatensystem ein.

4 b) Ermitteln Sie den Inhalt der von den Graphen G_f und G_h eingeschlossenen Fläche näherungsweise, indem Sie den Flächeninhalt eines geeigneten Drachenvierecks berechnen. Zeichnen Sie das verwendete Drachenviereck in das oben verwendete Koordinatensystem ein.

5 c) Bestimmen Sie für die quadratische Funktion $p: x \mapsto ax^2 + bx + c$ mit $D_p = \mathbb{R}$ die Parameter a, b und c so, dass der Graph von p im Punkt $S(0|e)$ seinen Scheitel hat und durch die Punkte $A(-1|1)$ und $B(1|1)$ verläuft. [Ergebnis: $p(x) = (1-e)x^2 + e$]

6 d) Der Graph der quadratischen Funktion $q: x \mapsto \left(1 - \frac{1}{e}\right)x^2 + \frac{1}{e}$ mit $D_q = \mathbb{R}$ hat seinen Scheitel im Punkt $T\left(0 \,|\, \frac{1}{e}\right)$ und verläuft durch die Punkte $A(-1|1)$ und $B(1|1)$ (Nachweis nicht verlangt).
Berechnen Sie nun näherungsweise den Inhalt der von den Graphen G_f und G_h eingeschlossenen Fläche, indem Sie die Funktionen p und q als Näherungen für die Funktionen f und h verwenden.

40

BE

II.

Die nebenstehende Abbildung zeigt den Graphen G_f einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades mit dem Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}$.

7 a) Bestimmen Sie mit Hilfe der in der Abbildung angegebenen Punkte von G_f die Funktionsgleichung von f.

[Ergebnis: $f(x) = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{2}x^2$]

9 b) Berechnen Sie die Lage des Hochpunktes H sowie des Wendepunktes W von G_f. Ermitteln Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der Wendetangente von G_f mit der x-Achse.

[Ergebnisse: $H\left(4 \mid \frac{8}{3}\right), W\left(2 \mid \frac{4}{3}\right), S\left(\frac{2}{3} \mid 0\right)$]

7 c) Bestimmen Sie $\int\limits_0^2 f(x)dx$.

Der Koordinatenursprung und die Punkte S und W bilden ein Dreieck, das durch G_f geteilt wird. Zeichnen Sie dieses Dreieck in die Abbildung ein und berechnen Sie, in welchem Verhältnis der Graph G_f die Dreiecksfläche teilt.

Betrachtet wird nun die Funktion $F: x \mapsto \int\limits_2^x f(t)\,dt$ mit $D_F = \mathbb{R}$.

6 d) Geben Sie ohne Rechnung F(0) und F(2) an (kurze Begründung). Bestimmen Sie mit Hilfe einer Vorzeichenbetrachtung zu f das Monotonieverhalten von F. Welche Besonderheit des Graphen von F liegt an der Stelle x = 0 vor?

3 e) Skizzieren Sie unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse den Graphen von F in das gegebene Koordinatensystem in der Abbildung. (Die Berechnung weiterer Funktionswerte ist nicht verlangt.)

Schließlich wird noch die Funktion $g: x \mapsto \frac{1}{f(x)}$ mit maximaler Definitionsmenge D_g untersucht. Der Graph von g wird mit G_g bezeichnet.

5 f) Geben Sie D_g an und untersuchen Sie das Verhalten von g an den Rändern des Definitionsbereichs.

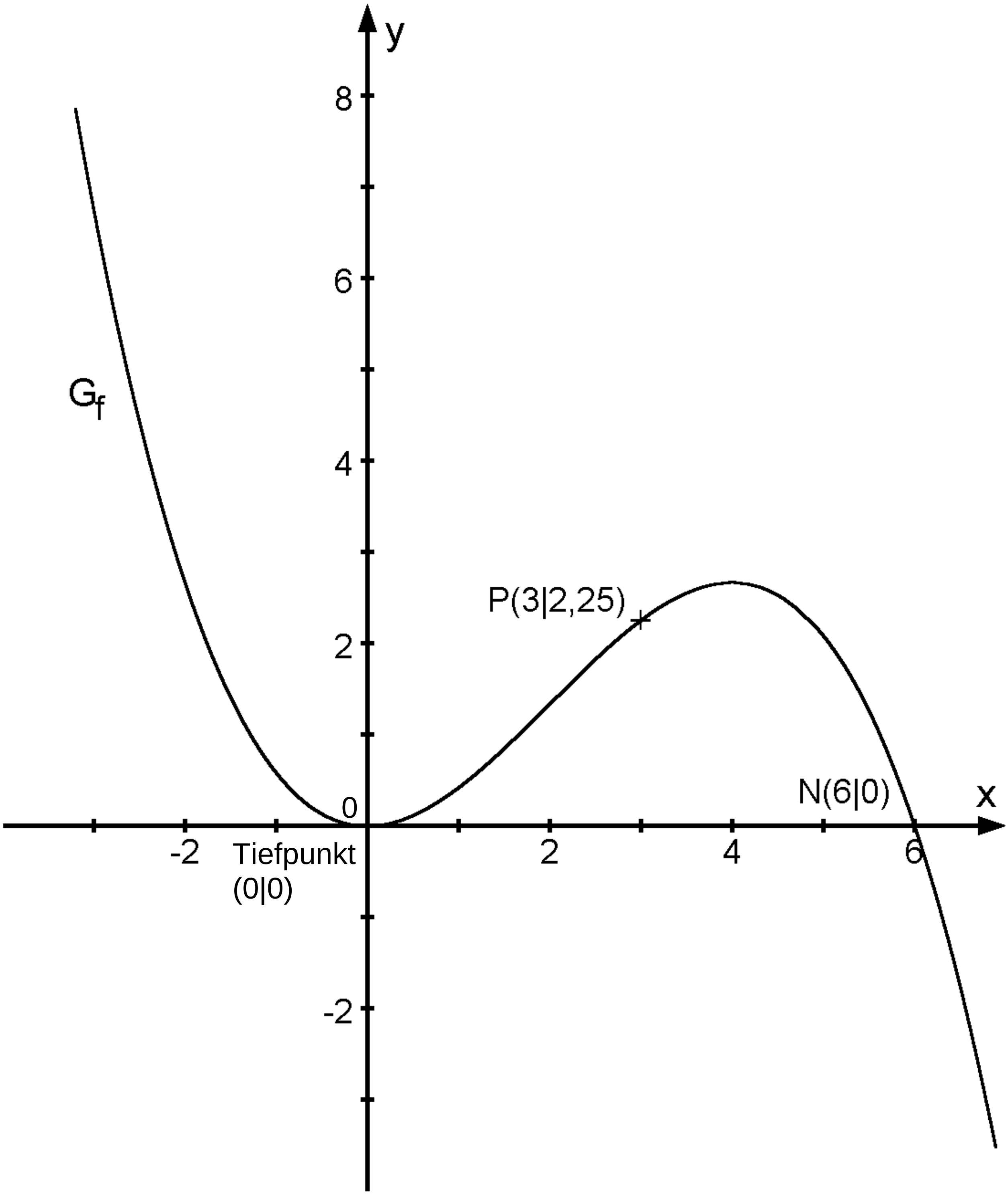
3 g) Untersuchen Sie G_g auf Extrempunkte; geben Sie gegebenenfalls deren Art und Lage an.

40

Zu Abituraufgabe GM1.II

Die Angabe ist mit abzugeben.

Name:...
(vom Prüfling einzutragen)



GM2. WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG/STATISTIK

BE

III.

Bei einem Fußball-Turnier stehen die Mannschaften von Althausen (A) und Burgdorf (B) im Endspiel.

1. Der Trainer von A stellt seine Mannschaft zusammen. Hierfür werden vier der sieben verfügbaren Abwehrspieler, vier der fünf Mittelfeldspieler, zwei der sechs Angriffsspieler und einer der drei Torhüter ausgewählt.

3 a) Wie viele Möglichkeiten hat der Trainer, seine Mannschaft zusammenzustellen?

4 b) Vor dem Spiel sollen sich die elf ausgewählten Spieler für ein Gruppenfoto so in eine Reihe stellen, dass die Abwehr-, die Mittelfeld- und die Angriffsspieler jeweils nebeneinander stehen und der Torwart am Rand steht. Wie viele Möglichkeiten gibt es hierfür?

4 2. Für den Torhüter beträgt die Wahrscheinlichkeit 2 %, dass er während des Spiels verletzt wird und ausgewechselt werden muss; für jeden der zehn Feldspieler liegt der entsprechende Wert bei 5 %. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird im Laufe des Spiels keiner der 11 Akteure einer Mannschaft wegen Verletzung ausgewechselt?

3. Da das Spiel nach Ablauf der regulären Spielzeit unentschieden steht, folgt ein Elfmeterschießen. Im Folgenden kann vereinfachend davon ausgegangen werden, dass jeder Spieler von A mit einer Wahrscheinlichkeit von 75 % einen Elfmeter verwandelt, während jeder Spieler von B eine Trefferquote von 70 % hat.

5 a) Wie viele Elfmeter muss Mannschaft A mindestens schießen, damit sie mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99,9 % mindestens einen Treffer erzielt?

Als Alternativen zum üblichen Ablauf eines Elfmeterschießens werden die beiden in den folgenden Teilaufgaben 3b und 3c behandelten Verfahren vorgeschlagen.

6 b) Beide Mannschaften schießen je dreimal. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieses Elfmeterduell unentschieden endet.

6 c) Die Schützen der beiden Mannschaften treten paarweise gegeneinander an: Ein Spieler von A und einer von B schießen je einmal; liegt danach eine Mannschaft in Führung, endet das Spiel sofort, anderenfalls wird das Verfahren mit dem nächsten Spielerpaar wiederholt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit würde bei diesem Vorgehen nach drei angetretenen Paaren immer noch kein Sieger feststehen?

(Fortsetzung nächste Seite)

BE	
	4. Der Torhüter von Mannschaft A behauptet, dass er einen Elfmeter mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 75 % verwandelt.
4	a) Man ist bereit, die Behauptung des Torhüters zu akzeptieren, wenn er von 30 Elfmetern mindestens 24 verwandelt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die Trefferqote des Torhüters irrtümlich für höher als 75 % gehalten?
5	b) Die Nullhypothese $H_0: p \leq 75\,\%$ soll auf dem Signifikanzniveau von 5 % bei einem Stichprobenumfang von 30 Elfmetern getestet werden. Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel.
3	c) Geben Sie an, wie sich die in Teilaufgabe 4a ermittelte Irrtumswahrscheinlichkeit tendenziell ändern würde, wenn man den Stichprobenumfang von 30 auf 60 und die Mindesttrefferzahl entsprechend von 24 auf 48 verdoppeln würde. Erläutern Sie, wie Sie zu Ihrer Antwort gekommen sind.
40	

BE

IV.

1. Eine Partei hält Versammlungen ab, zu denen jeweils 100 Mitglieder eingeladen werden. Erfahrungsgemäß besucht ein eingeladenes Mitglied die Versammlung mit einer Wahrscheinlichkeit von 70 %.

3 a) Eine Versammlung wird als „sehr gut besucht“ bezeichnet, wenn mindestens 80 der geladenen 100 Personen anwesend sind. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine Versammlung „sehr gut besucht“?

[Ergebnis: 1,65 %]

5 b) Wie viele Versammlungen müssen mindestens stattfinden, damit mit mehr als 90 % Wahrscheinlichkeit wenigstens eine Versammlung „sehr gut besucht“ ist?

2. Mit einer Umfrage ist der Bekanntheitsgrad des Spitzenkandidaten der Partei ermittelt worden. 16 % aller Befragten waren Männer, die den Spitzenkandidaten nicht kennen. Der Frauenanteil in der Umfrage betrug 52 %.
Aus der Menge der Befragten wird zufällig eine Person ausgewählt. Die beiden Ereignisse M: „Die Person ist ein Mann“ und B: „Die Person kennt den Spitzenkandidaten“ seien stochastisch unabhängig. Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B wird als Bekanntheitsgrad interpretiert.

5 a) Bestimmen Sie den Bekanntheitsgrad des Spitzenkandidaten.

4 b) Würde die Umfrage einen größeren, einen kleineren oder einen gleich großen Bekanntheitsgrad liefern, wenn der Anteil der Frauen kleiner als 52 % wäre und wiederum 16 % aller Befragten Männer sind, die den Spitzenkandidaten nicht kennen? Erläutern Sie, wie Sie zu Ihrer Antwort gekommen sind.

3. Der Bekanntheitsgrad p des Spitzenkandidaten der Partei liegt derzeit bei höchstens 80 %. Die Partei will eine Agentur beauftragen, den Bekanntheitsgrad auf über 80 % zu steigern. Die Partei schlägt der Agentur vor, auf Erfolgsbasis zu arbeiten, d. h., sie wird nur im Erfolgsfall bezahlt.
Um über den Erfolgsfall zu entscheiden, möchte die Partei nach einer festgelegten Zeitspanne die Nullhypothese $H_0 : p \leq 0{,}80$ an 200 zufällig ausgewählten Wahlberechtigten testen und H_0 nur ablehnen, wenn mindestens 170 der Befragten den Spitzenkandidaten kennen.

4 a) Wie hoch ist dabei das Risiko für die Partei, die Agentur irrtümlich zu bezahlen?

3 b) Wie groß ist dabei das Risiko für die Agentur, trotz eines Bekanntheitsgrades von 85 % kein Geld zu erhalten?

(Fortsetzung nächste Seite)

BE

5 c) Die Agentur ist mit der obigen Entscheidungsregel nicht einverstanden. Sie schlägt vor, diese so zu ändern, dass ihr Risiko, trotz eines Bekanntheitsgrades von 85 % kein Geld zu erhalten, kleiner als 10 % ist. Bestimmen Sie dafür den kleinstmöglichen Ablehnungsbereich.

2 d) Ein Mitarbeiter der Agentur liest in der Zeitung, dass der aktuelle Bekanntheitsgrad des Spitzenkandidaten in A-Stadt bei 78 % und in B-Stadt bei 84 % liegt. Er schließt daraus, dass der Bekanntheitsgrad in den beiden Städten insgesamt bei 81 % liegt. Nehmen Sie zu dieser Folgerung Stellung.

4. Die Partei will die Aufmerksamkeit der Medien auf ein 11-köpfiges Team lenken, dem neben dem Spitzenkandidaten 4 weitere Männer und 6 Frauen angehören. Für ein Foto soll sich dieses Team in einer Reihe aufstellen. Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür, wenn der Spitzenkandidat in der Mitte stehen soll und

3 a) nur nach Frauen und Männern unterschieden wird,

2 b) nach Personen unterschieden wird,

4 c) nach Personen unterschieden wird und keine zwei Personen gleichen Geschlechts nebeneinander stehen dürfen?

40

GM3. ANALYTISCHE GEOMETRIE

V.

BE	
	1. In einem kartesischen Koordinatensystem mit Ursprung O sind die Punkte $A(1\mid -3\mid -3)$, $B(2\mid 1\mid -2)$ und $D(5\mid -5\mid 1)$ sowie die beiden folgenden Geraden gegeben: $$g:\ \vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad h:\ \vec{x} = \overrightarrow{OD} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$ Die Geraden g und h legen eine Ebene H fest.
5	a) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene H in Normalenform. [mögliches Ergebnis: $x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 13 = 0$]
6	b) Vom Punkt B aus wird auf die Gerade g ein Lot gefällt. Bestimmen Sie die Koordinaten des Lotfußpunktes C und zeigen Sie, dass BC auch eine Lotgerade zur Ebene H ist. [Teilergebnis: C(3/–1/–4)]
5	c) Zeigen Sie, dass die Ebene $E_1: 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 1 = 0$ senkrecht auf der Ebene H steht und das Dreieck ABC enthält.
	2. Das Dreieck ABC bildet die Grundfläche des dreiseitigen Prismas ABCDEF mit der Strecke [AD] als einer Seitenkante.
6	a) Zeigen Sie, dass AD senkrecht auf der Ebene E_1 steht, und berechnen Sie die Koordinaten der fehlenden Punkte E und F. Fertigen Sie eine Skizze des Prismas an.
3	b) Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E_2, welche die Deckfläche des Prismas enthält, in Normalenform.
4	c) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist, und berechnen Sie das Volumen des Prismas.
4	d) Die Ebene, die durch die Punkte A, B und F bestimmt ist, zerlegt das Prisma in zwei Teilkörper. Bestimmen Sie das Verhältnis der Rauminhalte dieser Teilkörper.
7	e) Geben Sie zwei Möglichkeiten an, das Prismenvolumen durch Schnitt des Prismas mit einer Ebene zu halbieren. Beschreiben Sie dazu genau die Lage der jeweiligen Schnittebene und geben Sie die Gleichungen der beiden Ebenen in Parameter- oder Normalenform an.
40	

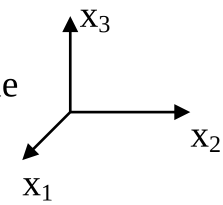
BE

VI.

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(4|-1|4)$, $B(6|7|4)$ und $C(6|7|8)$ sowie die Ebene $E: x_3 - 6 = 0$ gegeben.

4 1. a) Bestätigen Sie, dass das Dreieck ABC bei B rechtwinklig ist, und beschreiben Sie, welche besondere Lage bezüglich der x_1x_2-Ebene die beiden Katheten des Dreiecks jeweils haben.

4 b) Das Dreieck ABC kann durch einen vierten Punkt D zu einem Rechteck ergänzt werden. Berechnen Sie die Koordinaten von D und tragen Sie das Rechteck ABCD in ein Koordinatensystem ein (vgl. Skizze).



4 c) Begründen Sie, dass die Ebene E Symmetrieebene des Rechtecks ABCD ist.

2. Bei Rotation des Rechtecks ABCD um die Achse AB entsteht ein gerader Kreiszylinder als Rotationskörper.

3 a) Begründen Sie, dass eine Mantellinie dieses Zylinders die x_1x_2-Ebene berührt. Ergänzen Sie Ihre Zeichnung um diese Mantellinie.

3 b) Berechnen Sie den Winkel, den diese Mantellinie mit der x_1-Achse einschließt.

4 c) Bei der Rotation umkreist der Punkt C die Grundfläche G des Zylinders. Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene F, in der G liegt.

[mögliches Ergebnis: $F: x_1 + 4x_2 - 34 = 0$]

4 d) Rollt man den Zylinder auf der x_1x_2-Ebene, so berührt die Grundfläche G diese Ebene in Punkten einer Geraden g.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden g.

[mögliches Ergebnis: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R}$]

5 e) Zeigen Sie, dass die Gerade g in der x_1x_2-Ebene durch die Gleichung $x_2 = -\frac{1}{4}x_1 + 8{,}5$ beschrieben wird, und berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die g mit der x_1-Achse und der x_2-Achse einschließt.

5 f) Die Ebene E und der Zylinder schneiden sich in einem Rechteck R. Berechnen Sie den Flächeninhalt von R.

4 g) S ist der Diagonalenschnittpunkt des Rechtecks R. Welche besondere Lage hat S im Rechteck ABCD? Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes S und beschreiben Sie Art und Lage der Kurve, auf der sich der Punkt S bei der Rotation um die Achse AB bewegt.

40