# Abiturprüfung 1999

## MATHEMATIK

als Grundkursfach

**Arbeitszeit: 180 Minuten**

Der Fachausschuss wählt je eine Aufgabe aus den Gebieten GM1, GM2 und GM3 zur Bearbeitung aus.

BE

# GM1. INFINITESIMALRECHNUNG

## I.

Gegeben ist für $k \in \mathbb{R}^+$ die Schar von Funktionen $f_k : x \mapsto -\dfrac{x^2}{x+k}$ mit maximalem Definitionsbereich $D_k$. Der Graph von $f_k$ wird mit $G_k$ bezeichnet.

6 1. a) Geben Sie $D_k$ sowie die Nullstelle von $f_k$ an und untersuchen Sie das Verhalten der Funktion an den Grenzen des Definitionsbereichs.

8 b) Ermitteln Sie das Monotonieverhalten von $f_k$ und bestimmen Sie Art und Lage der Extrempunkte von $G_k$.

$$\left[\text{zur Kontrolle: } f_k'(x) = -\frac{x(x+2k)}{(x+k)^2}\right]$$

3 c) Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden g, auf der die Extrempunkte aller Graphen $G_k$ liegen.

Im Folgenden sei $k = 1$.

5 2. a) Ermitteln Sie eine Gleichung der schiefen Asymptote des Graphen $G_1$ und zeigen Sie, dass diese den Graphen nicht schneidet.

6 b) Zeichnen Sie den Graphen $G_1$ unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse zusammen mit seinen Asymptoten und der Geraden g im Bereich $-5 < x < 3$ (Längeneinheit 1 cm).
Berücksichtigen Sie dafür auch, dass der Graph $G_1$ symmetrisch zum Punkt $(-1|2)$ ist (Nachweis nicht erforderlich).

3 c) Geben Sie eine Beziehung zwischen $f_1(-1+t)$ und $f_1(-1-t)$ für $t \neq 0$ an, welche die in Teilaufgabe 2b genannte Punktsymmetrie algebraisch beschreibt.

3 3. a) Zeigen Sie, dass $F : x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 + x - \ln(x+1)$ für $x > -1$ Stammfunktion von $f_1$ ist.

6 b) Der Graph $G_1$, die y-Achse und die zwei Geraden mit den Gleichungen $y = -x + 1$ sowie $x = u$ $(u > 0)$ schließen ein Flächenstück vom Inhalt $A(u)$ ein. Bestimmen Sie $A(u)$ und berechnen Sie u so, dass $A(u) = 1$ ist.

40

BE

## II.

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \dfrac{1}{x(1-\ln x)}$ mit maximalem Definitionsbereich $D_f$. Ihr Graph wird mit $G_f$ bezeichnet.

7 1. a) Bestimmen Sie $D_f$ und ermitteln Sie das Verhalten von f an den Grenzen des Definitionsbereichs.
(Hinweis: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} (x \cdot \ln x) = 0$ darf ohne Beweis verwendet werden.)

7 b) Zeigen Sie, dass in $D_f$ gilt:

$$f'(x) = [f(x)]^2 \cdot \ln x$$

Ermitteln Sie damit das Monotonieverhalten der Funktion f.
Bestimmen Sie ohne Verwendung der zweiten Ableitung die Lage und Art des Extrempunkts von $G_f$.

Gegeben ist nun zusätzlich die Funktion $h: x \mapsto \dfrac{2}{x}$ mit $D_h = \mathbb{R}^+$. Ihr Graph wird mit $G_h$ bezeichnet.

8 2. a) In welchem Punkt $S(x_s \mid y_s)$ schneiden sich $G_f$ und $G_h$? Berechnen Sie die Steigung der Tangenten an $G_f$ und $G_h$ im Punkt S. Ermitteln Sie daraus den Schnittwinkel dieser beiden Tangenten (auf Grad genau). [zur Kontrolle: $x_s = \sqrt{e}$ ]

7 b) Fertigen Sie eine Zeichnung der Graphen $G_f$ und $G_h$ im Bereich $0 < x < 6$ (Längeneinheit 2 cm) unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse.

3 3. a) Zeigen Sie, dass die Funktion $F: x \mapsto -\ln(1-\ln x)$ für $0 < x < e$ eine Stammfunktion von f ist.

8 b) Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das die Graphen von f und h sowie die Gerade mit der Gleichung $x = 1$ einschließen.
Um wie viel Prozent weicht dieser ab vom Inhalt des Dreiecks mit den Eckpunkten $(1|2)$, $(1|1)$ und S (vgl. Teilaufgabe 2a)?

40

BE

## GM2. WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG/STATISTIK

### III.

Vroni hat zu ihrer Geburtstagsparty 3 Freundinnen und 4 Freunde eingeladen.

1. Die Partygäste Max und Peter kommen erfahrungsgemäß (unabhängig voneinander) mit den Wahrscheinlichkeiten 30 % bzw. 40 % zu spät. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zu Vronis Party

2 a) beide zu spät kommen,
3 b) mindestens einer zu spät kommt.

2. Bei dem Spiel „Flaschenglücksrad" sitzen alle 8 Jugendlichen in einem Kreis um eine am Boden liegende Flasche. Die Flasche wird gedreht und zeigt anschließend zufällig auf einen der Mitspieler, der dann ein Pfand abgeben muss. Die Wahrscheinlichkeit, getroffen zu werden, ist für jeden Mitspieler $\frac{1}{8}$.

6 a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Peter bei 12-maligem Andrehen der Flasche mindestens zwei Pfandstücke abgeben muss?
6 b) Wie oft muss die Flasche mindestens angedreht werden, damit Vroni mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95 % wenigstens ein Pfandstück abgeben muss?

5 3. Für eine Pantomime werden aus den 8 Jugendlichen auf zufällige Weise 4 ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Vroni und Peter zusammen in der ausgewählten Gruppe sind?

4. Auf der Tanzfläche tanzen nur Paare aus jeweils einem Mädchen und einem Jungen. Wie viele verschiedene Zusammenstellungen der Paare auf der Tanzfläche gibt es, wenn

3 a) alle 8 Teilnehmer der Party mittanzen,
3 b) von den jungen Männern nur Max und Peter tanzen?

(Fortsetzung nächste Seite)

| BE | | |
|---|---|---|
| 7 | 5. | Bei einem Würfelspiel beobachten Max und Peter, dass ein Würfel auffällig oft die Zahl 6 zeigt. Sie vermuten, dass der Würfel gezinkt ist, und beschließen, einen Test durchzuführen. Dazu werfen sie den Würfel 100-mal.<br>Die Wahrscheinlichkeit dafür, den Würfel irrtümlich als gezinkt einzustufen, soll höchstens 5% betragen. Ermitteln Sie die Entscheidungsregel. |
| 5 | 6. | Vroni hat für die Partyteilnehmer 8 Törtchen gebacken. In den Teig hat sie 3 Glücksbringer gerührt, die dadurch zufällig auf die 8 Förmchen verteilt worden sind.<br>Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Peter in seinem Törtchen genau einen Glücksbringer findet? |
| 40 | | |

BE

## IV.

Eine Firma stellt „Billig-Glühlämpchen“ her. Dabei entstehen erfahrungsgemäß 10 % Ausschuss. Die nicht kontrollierten Lämpchen werden in Kartons zu 50 Packungen mit je 20 Stück abgepackt.

4 1. a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer 20er Packung mehr als drei Lämpchen defekt sind? [Ergebnis: 13,3 %]

5 b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist in einem 50er Karton höchstens eine 20er Packung mit mehr als drei defekten Lämpchen?

2. Dem Elektrogeschäft Krötl wurde eine Serie von 20er Packungen mit jeweils genau 5 defekten Lämpchen geliefert.

4 a) Ein Kunde kauft 10 Lämpchen, die gleichzeitig einer vollen 20er Packung entnommen werden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind unter diesen zehn Lämpchen genau 2 defekt?

5 b) Auf wie viele Arten kann man 2 defekte und 8 intakte, sonst nicht unterscheidbare Lämpchen als Lichterkette in einer Reihe anordnen, wenn
(1) keine weiteren Bedingungen vorliegen,
(2) die defekten Lämpchen nicht nebeneinander liegen sollen?

7 c) Ein weiterer Kunde möchte drei Lämpchen kaufen. Der Verkäufer entnimmt ein Lämpchen aus einer vollen 20er Packung mit 5 defekten Lämpchen und prüft es. Ist es defekt, wirft er es weg, sonst gibt er es dem Kunden und entnimmt der Packung das nächste zu prüfende Lämpchen.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das vierte vom Verkäufer geprüfte Lämpchen das dritte intakte?

3. Aufgrund eines zunächst unerkannten Defekts hat eine Maschine Lämpchen mit 30 % Ausschuss produziert. Diese Lämpchen wurden so wie oben beschrieben verpackt. Um die Kartons mit Lämpchen höherer Ausschussquote nachträglich auszusondern, wird folgendes Testverfahren durchgeführt:

(Fortsetzung nächste Seite)

BE

Ein Karton wird ausgesondert, wenn von 25 zufällig entnommenen Lämpchen mehr als 3 defekt sind. (Rechnen Sie im Folgenden wie bei „Ziehen mit Zurücklegen".)

4 a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird bei diesem Test ein Karton nicht ausgesondert, obwohl er Lämpchen erhöhter Ausschussquote enthält?

5 b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird bei diesem Test ein Karton irrtümlich ausgesondert?

6 c) Aus Sicht der Firma wird ein Karton mit zu großer Wahrscheinlichkeit irrtümlich ausgesondert. Für einen verbesserten Test sollen den Kartons jeweils 50 Lämpchen entnommen werden. Die Wahrscheinlichkeit, einen Karton irrtümlich auszusondern, soll höchstens 5 % betragen. Ermitteln Sie die Entscheidungsregel.

40

BE

## GM3. ANALYTISCHE GEOMETRIE

## V.

Gegeben sind in einem kartesischen Koordinatensystem die Punkte
$A(-10|5|-10)$, $B(0|0|0)$, $C(6|17|10)$, $D(-8|19|-5)$.

7 1. a) Zeigen Sie, dass sich die Geraden AC und BD im Punkt $M(-4|9{,}5|-2{,}5)$ unter einem rechten Winkel schneiden.

5 b) Die Punkte A, B, C und D bilden das Viereck ABCD. In welchem Verhältnis teilt der Punkt M die Diagonalen $[AC]$ und $[BD]$ dieses Vierecks? [Teilergebnis: $\overline{BM} : \overline{MD} = 1:1$]

2 c) Welche Symmetrieeigenschaft lässt sich für das Viereck ABCD aus den bisherigen Ergebnissen folgern?

4 d) Weisen Sie nach, dass es einen Kreis mit Mittelpunkt M gibt, auf dem die Punkte A, B und D liegen.
Wie groß ist demzufolge der Winkel $\sphericalangle$ BAD? (Begründung!)

4 e) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Vierecks ABCD.
[zur Kontrolle: $A_{\text{Viereck ABCD}} = 300$]

Durch das Viereck ABCD ist eine Ebene E bestimmt.

5 2. a) Geben Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform an.
[mögliches Ergebnis: $E\colon 11x_1 + 2x_2 - 10x_3 = 0$]

4 b) Geben Sie eine Gleichung der Geraden g an, die die Ebene E im Punkt A senkrecht schneidet.
Zeigen Sie, dass der Punkt $S(-21|3|0)$ auf der Geraden g liegt.

3 c) Berechnen Sie den Rauminhalt der Pyramide ABCDS.

6 d) Bei der Anfertigung eines Netzes der Pyramide ABCDS wird die Seitenfläche ADS in die Ebene E nach außen geklappt. Dabei fällt S auf den Punkt S´. Bestimmen Sie die Koordinaten von S´.

40

| BE | |
|---|---|

# VI.

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(5|3|-4)$, $B(6|-1|4)$ und $D(-2|7|0)$ gegeben. Die Punkte A, B und D legen eine Ebene E fest.

5 1. a) Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Normalenform.
[mögliches Ergebnis: $E: 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 27 = 0$]

3 b) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABD gleichschenklig, aber nicht gleichseitig ist.

4 c) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punkts C so, dass das Viereck ABCD eine Raute bildet, und berechnen Sie die Koordinaten des Diagonalenschnittpunkts M. [Teilergebnis: $M(2|3|2)$]

6 d) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Raute und damit den Abstand zweier gegenüberliegender Seiten der Raute.
Geben Sie den Radius r ihres Inkreises an.

2. Gegeben ist weiter der Punkt $S(10|13|6)$.

5 a) Berechnen Sie den Fußpunkt F des Lots von S auf die Ebene E.
[Ergebnis: F=M]

6 b) Die Raute ABCD bildet zusammen mit dem Punkt S die Pyramide ABCDS. Bestimmen Sie den Winkel $\sphericalangle BAS$ auf 0,1° genau.
Zeichnen Sie das Dreieck ABS.

3 c) Geben Sie eine Gleichung der Ebene H an, die den Punkt S enthält und auf der Geraden AB senkrecht steht.
[mögliches Ergebnis: $H: x_1 - 4x_2 + 8x_3 - 6 = 0$]

4 d) Berechnen Sie den Abstand d des Punkts A von der Ebene H.
Kennzeichnen Sie in Ihrer Zeichnung aus Teilaufgabe 2b die Strecke, deren Länge Sie soeben mit dem Abstand d berechnet haben.

4 e) Berechnen Sie den Flächeninhalt einer Seitenfläche der Pyramide ABCDS.

40