BAYERN Abitur 1996 Mathematik Grundkurs

Infinitesimalrechnung I

Gegeben ist die Funktion

$$f : x \mapsto \frac{1 - \mathrm{e}^{2x}}{1 + \mathrm{e}^{2x}}$$

mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

1. (a) Bestimmen Sie die Nullstelle der Funktion f und das Verhalten von f für $x \to -\infty$. (3 BE)

   (b) Zeigen Sie, dass G_f punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung ist. Geben Sie nun das Verhalten von f für $x \to +\infty$ an. (5 BE)

   (c) Zeigen Sie: $f'(x) = \dfrac{-4\mathrm{e}^{2x}}{(1 + \mathrm{e}^{2x})^2}$.

   Ermitteln Sie das Monotonieverhalten von f, und geben Sie die Wertemenge von f an. (7 BE)

   (d) Der Ursprung des Koordinatensystems ist Wendepunkt von G_f (Nachweis nicht verlangt).

   Berechnen Sie die Gleichung der Wendetangente. (2 BE)

   (e) Berechnen Sie $f(1)$ auf zwei Dezimalen genau. Zeichnen Sie G_f unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse (Längeneinheit 2 cm). (5 BE)

2. Begründen Sie, dass f umkehrbar ist.

   Bestimmen Sie für die Umkehrfunktion f^{-1} Funktionsterm, Definitions- und Wertemenge. Zeichnen Sie den Graphen der Umkehrfunktion $G_{f^{-1}}$ in das Koordinatensystem von Teilaufgabe 1e ein. (8 BE)

3. (a) Zeigen Sie, dass $F : x \mapsto x - \ln(1 + \mathrm{e}^{2x})$ mit $\mathbb{D}_F = \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f ist. (4 BE)

   (b) Berechnen Sie $J = \int\limits_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$ auf drei Dezimalen genau. (3 BE)

   (c) G_f, $G_{f^{-1}}$ und die Geraden mit den Gleichungen $x = -1$ und $y = 1$ begrenzen im II. Quadranten ein Flächenstück.

   Berechnen Sie dessen Inhalt auf zwei Dezimalen genau. (3 BE)

Infinitesimalrechnung II

Gegeben ist die reelle Funktion

$$f : x \mapsto \frac{2-x}{x^2-x}$$

mit ihrer maximalen Definitionsmenge $\mathbb{D}_f$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

1. (a) Bestimmen Sie $\mathbb{D}_f$ und die Nullstelle der Funktion f. (3 BE)

   (b) Untersuchen Sie das Verhalten von f in der Umgebung der Definitionslücken sowie für $x \to \pm\infty$. (6 BE)

   (c) Zeigen Sie: $f'(x) = \dfrac{x^2-4x+2}{(x^2-x)^2}$.

   Weisen Sie ohne Verwendung der 2. Ableitung nach, dass G_f an der Stelle $x_1 = 2-\sqrt{2}$ einen Hochpunkt und an der Stelle $x_2 = 2+\sqrt{2}$ einen Tiefpunkt besitzt.

   Berechnen Sie die zugehörigen Funktionswerte auf zwei Dezimalen genau. (10 BE)

   (d) Berechnen Sie $f(-1)$, $f(1{,}5)$ und $f'(2)$.

   Zeichnen Sie G_f unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse (Längeneinheit 1 cm). (8 BE)

2. Gegeben ist weiter die Integralfunktion $F : x \mapsto \displaystyle\int_{1{,}5}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ mit $\mathbb{D}_F =]1;+\infty[$.

   (a) Zeigen Sie: $F(x) = \ln\left[\dfrac{9(x-1)}{2x^2}\right]$ (6 BE)

   (b) Ermitteln Sie alle Nullstellen von F, und deuten Sie das Ergebnis geometrisch. (7 BE)

Analytische Geometrie I

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(0|-4|0)$, $B(6|8|4)$ und $M(-3|4|5)$ gegeben. Die Punkte A, B und M bestimmen die Ebene E.

1. (a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABM gleichschenklig und bei M rechtwinklig ist. (4 BE)

   (b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform.
   [Mögliches Ergebnis: $E: 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 12 = 0$) (6 BE)

2. M sei der Mittelpunkt eines Quadrats $ABCD$.

   (a) Ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte C und D.
   [Zur Kontrolle: $D(-12|0|6)$] (5 BE)

   (b) Der Punkt $S(s_1|s_2|s_3)$ mit $s_3 > 0$ ist die Spitze der Pyramide $ABCDS$ mit dem Höhenfußpunkt M. Bestimmen Sie die Koordinaten von S, wenn die Pyramide das Volumen 1372 hat.
   [Ergebnis: $S(3|-5|23)$] (7 BE)

   (c) Berechnen Sie den Winkel (auf $0,1°$ genau), unter dem die Gerade DS die Ebene E schneidet. (5 BE)

3. Gegeben ist die Ebene $F: 6x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 8 = 0$.

   (a) Zeigen Sie, dass die Ebene F senkrecht auf der Ebene E steht und die Gerade AB enthält. (4 BE)

   (b) Die Gerade DS schneidet die Ebene F im Punkt S^*. Bestimmen Sie die Koordinaten von S^*. (5 BE)

   (c) Wie groß ist das Volumen der Pyramide $ABCDS^*$? (4 BE)

Analytische Geometrie II

In einem kartesischen Koordinatensystem bestimmen die Punkte $A(1|0|2)$, $B(6|0|2)$ und $C(6|4|-1)$ die Ebene E. Eine weitere Ebene F ist durch

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 0$$

gegeben.

1. (a) Zeigen Sie: A, B und C können durch einen Punkt D zu einem Quadrat $ABCD$ ergänzt werden. Berechnen Sie die Koordinaten von D. (5 BE)

   (b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform.
   [Mögliches Ergebnis: $E : 3x_2 + 4x_3 - 8 = 0$] (5 BE)

   (c) Berechnen Sie die Schnittgerade g der Ebenen E und F. (7 BE)

2. Die Ebene $E' : 3x_2 + 4x_3 = 0$ und die Ebene F schneiden sich in der Geraden g'.

   (a) Bestimmen Sie den Abstand der Ebenen E und E'. Untersuchen Sie die gegenseitige Lage von g und g', und zeigen Sie, dass der Ursprung auf g' liegt. (7 BE)

   (b) Bezüglich der üblichen Verknüpfungen bildet die Menge V' der Ortsvektoren der Punkte von g' einen eindimensionalen Vektorraum, die Menge V der Ortsvektoren der Punkte von g (vgl. Teilaufgabe 1c) jedoch nicht. Begründen Sie, warum V kein Vektorraum ist, und geben Sie eine Basis von V' an. (3 BE)

3. Das Quadrat $ABCD$ bildet die Grundfläche einer Pyramide $ABCDS$ mit gleich langen Kanten.

   (a) Berechnen Sie Höhe und Volumen der Pyramide $ABCDS$.
   [Teilergebnis: $h = \frac{5}{2}\sqrt{2}$] (6 BE)

   (b) Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes S, wenn S in dem durch die Ebene E bestimmten Halbraum des $\mathbb{R}^3$ liegt, der den Ursprung nicht enthält. (7 BE)

Wahrscheinlichkeitsrechnung I

In einer Zeitschrift wird eine Bildungsreise angegeben, an der insgesamt 22 Personen teilnehmen können.

1. Es melden sich 30 Interessenten für die Reise.

   (a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, daraus eine Reisegruppe mit 22 Personen zusammenzustellen? (2 BE)

   (b) Unter den 30 Interessenten sind vier Lehrer und acht Schüler. Wie viele Möglichkeiten gibt es, eine 22 köpfige Reisegruppe mit genau zwei Lehrern und genau vier Schülern zusammenzustellen? (5 BE)

2. Man weiß aus Erfahrung, dass 15% der angemeldeten Personen kurz vor der Reise absagen. Es werden deshalb 25 Anmeldungen angenommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass am Tag der Abreise höchstens 22 der angemeldeten 25 Personen erscheinen? (Hinweis: Beachten Sie eine geeignete Bernoulli-Kette.) (5 BE)

3. Eine Reisegruppe besteht aus 18 Damen und vier Herren. Neun Damen und zwei Herren wollen eine Tanzveranstaltung besuchen.

   (a) Prüfen Sie durch Rechnung, ob die Ergeignisse

   D: „Eine zufällig aus der Reisegruppe ausgewählte Person ist eine Dame“

   und

   T: „Eine zufällig aus der Reisegruppe ausgewählte Person will eine Tanzveranstaltung besuchen“

   stochastisch unabhängig sind. (4 BE)

   (b) Die Personen, die eine Tanzveranstaltung besuchen wollen, stallen sich für ein Gruppenfoto in einer Reihe auf, wobei keine Dame am Rand stehen soll. Wie viele derartige Anordnungen gibt es? (2 BE)

4. Während der in Teilaufgabe 3 erwähnten Tanzveranstaltung findet eine Tombola statt, bei der laut Veranstalter 20% aller Lose Gewinnlose sind (Hinweis: Die Zahl der Lose sei so groß, dass im Folgenden das Modell „Ziehen mit Zurücklegen“zugrunde gelegt werden kann.) Zunächst wird davon ausgegangen, dass die Behauptung des Veranstalters zutrifft.

   (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 12 Losen mindestens zwei Gewinnlose sind? (6 BE)

   (b) Wie viele Lose muss man mindestens kaufen, um mit mehr als 90%iger Sicherheit wenigstens ein Gewinnlos zu erhalten? (6 BE)

   Um die Behauptung des Veranstalters zu testen, werden nun 100 Lose gekauft. Die Behauptung wird abgelehnt, wenn darunter höchstens 15 Gewinnlose sind.

   (c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, die Behauptung abzulehnen, obwohl sie zutrifft? (5 BE)

   (d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, die Behauptung abzulehnen, obwohl in Wirklichkeit nur jedes sechste Los gewinnt? (5 BE)

Wahrscheinlichkeitsrechnung II

Ein Frage-Antwort-Spiel besteht aus 500 Fragekarten, 100 Karten decken das Fachgebiet „Geschichte“ , 100 Karten „Naturwissenschaften“ und 300 Karten „Allgemeinwissen“ ab. Alle Karten sind gut gemischt und liegen verdeckt in einem Kasten.

1. Nach jedem Zug legt Tassilo die gezogene Karte wieder zurück und mischt erneut.

   (a) Er zieht zweimal. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält er zwei Geschichtskarten? (3 BE)

   (b) Wie oft muss er mindestens ziehen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99% mindestens eine Geschichtskarte zu erhalten? (6 BE)

   (c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind bei 200maligem Ziehen mindestens 150 Fragen keine Geschichtsfragen? (5 BE)

2. Claudia nimmt aus dem Kasten 10 Karten, und zwar drei „Geschichte“ , zwei „Naturwissenschaften“ und fünf „Allgemeinwissen“ . Die Karten werden nur nach Fachgebieten unterschieden.

   (a) Wie viele Möglichkeiten der Reihenfolge gibt es, diese Karten nebeneinander auf den Tisch zu legen? (4 BE)

   (b) Bei wie vielen der in Teilaufgabe 2.(a) betrachteten Möglichkeiten liegen alle Karten aus den jeweiligen Fachgebieten nebeneinander? (3 BE)

   (c) Claudia mischt ihre zehn Karten, legt sie verdeckt auf den Tisch und zieht zwei Karten gleichzeitig. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gehören die gezogenen Karten dem gleichen Fachgebiet an? (7 BE)

3. Bei der Herstellung sind fehlerhafte Spiele produziert worden, die 30% Karten aus dem Fachgebiet „Geschichte“enthalten. Um diese Spiele auszusortieren, zieht man 50 Karten. Man betrachtet das Spiel als fehlerhaft, wenn dabei mindestens k Geschichtskarten gezogen werden.

   (Hinweis: Verwenden Sie das Modell „Ziehen mit Zurücklegen“).

   (a) Es liegt ein fehlerhaftes Spiel vor. Mit welcher Wahrscheinlichkeit glaubt man für $k = 12$ fälschlicherweise, dass es sich um kein fehlerhaftes Spiel handelt? (5 BE)

   (b) Für welches maximale k wird ein fehlerhaftes Spiel mit mindestens 95%iger Sichrheit als solches eingestuft? (7 BE)