BAYERN Abitur 1991 Mathematik Grundkurs

Infinitesimalrechnung I

Gegeben ist die Funktion

$$f : x \mapsto \frac{2x^3 + 2}{x^2}$$

mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

1. (a) Berechnen Sie die Nullstelle von f, und untersuchen Sie das Verhalten von f in der Umgebung der Definitionslücke. (3 BE)

   (b) Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion $g : x \mapsto 2x$ mit $\mathbb{D}_g = \mathbb{R}$ Asymptote von G_f für $|x| \to \infty$ ist und dass G_f stets oberhalb dieser Asymptote verläuft.

   Für welche x-Werte ist der Unterschied der Funktionswerte von f und g kleiner als $0,5$? (6 BE)

   (c) Bestimmen Sie Lage und Art des Extrempunktes $E(x_E|y_E)$ von G_f.
   [Zur Kontrolle: $x_E = \sqrt[3]{2}$]

   Zeigen Sie, dass G_f keine Wendepunkte besitzt. (8 BE)

   (d) Berechnen Sie die Gleichung der Tangente t an G_f im Schnittpunkt von G_f mit der x-Achse. (3 BE)

   (e) Berechnen Sie $f(-\frac{1}{2})$, $f(\frac{1}{2})$ und zeichnen Sie G_f im Bereich $[-4; 4]$ unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse. Tragen Sie auch die Tangente t (vgl. Teilaufgabe 1d) und die Asymptoten ein (Längeneinheit 1 cm). (7 BE)

2. (a) Der Graph G_f, die schräge Asymptote (vgl. Teilaufgabe 1b) und die Parallelen zur y-Achse mit den Gleichungen $x = 1$ und $x = u$ $(u > 0)$ begrenzen ein Flächenstück.

   Berechnen Sie seinen Inhalt $A(u)$. (5 BE)

   (b) Für welche Werte von u hat das Flächenstück den Inhalt $1,5$? (5 BE)

   (c) Untersuchen Sie das Verhalten von $A(u)$ für $u \to +\infty$ und für $u \to 0$. (3 BE)

Infinitesimalrechnung II

Gegeben sind die Funktionen

$$f : x \mapsto \frac{1}{2 - e^{\frac{x}{2}}}$$

mit maximalem Definitionsbereich $\mathbb{D}_f$ und

$$h : x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$$

mit $\mathbb{D}_h = \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion f wird mit G_f, der Graph der Funktion h mit G_h bezeichnet.

1. (a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich $\mathbb{D}_f$, und untersuchen Sie G_f auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen. (4 BE)

   (b) Ermitteln Sie das Verhalten von f für $x \to -\infty$ und für $x \to +\infty$.
   Wie verhält sich G_f in der Umgebung der Definitionslücke? (4 BE)

   (c) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f. (4 BE)

   (d) Zeigen Sie, dass sich G_f und G_h and der Stelle $x = 0$ berühren, und stellen Sie die Gleichung der gemeinsamen Tangente im Berührpunkt auf. (5 BE)

   (e) Berechnen Sie $f(-2)$, $f(1)$, $f(2)$ auf 2 Dezimalen gerundet, und skizzieren Sie mit Hilfe aller bisherigen Ergebnisse G_f im Bereich $-5 \leq x \leq 5$ (Längeneinheit 1 cm). (5 BE)

   (f) Berechnen Sie die Nullstellen von h, und bestimmen Sie die Lage und die Art des Extrempunktes von G_h.
   Skizzieren Sie G_h in das Koordinatensystem von Teilaufgabe 1e. (5 BE)

2. (a) Weisen Sie nach, dass $F : x \mapsto \frac{x}{2} - \ln(2 - e^{\frac{x}{2}})$ für $x < 2 \ln 2$ eine Stammfunktion von f ist. (5 BE)

   (b) Berechnen Sie, auf 2 Dezimalen gerundet, den Inhalt J des Flächenstücks, das von der Geraden mit der Gleichung $x = -4$, der x-Achse, dem Graphen G_h und dem Graphen G_f begrenzt wird. (8 BE)

Analytische Geometrie I

Gegeben sind in einem kartesischen Koordinatensystem der Punkt $P(-3|5|3)$ sowie die Geraden

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix};\ \sigma, \lambda \in \mathbb{R}.$$

1. (a) Weisen Sie nach, dass der Punkt P nicht auf der Geraden g_1 liegt, und stellen Sie in Normalenform eine Gleichung der Ebene E auf, die P und g_1 enthält.
   [Mögliches Ergebnis: $E : 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 5 = 0$] (7 BE)

   (b) Zeigen Sie, dass die Richtungsvektoren von g_1 und g_2 aufeinander senkrecht stehen, die Geraden selbst aber windschief zueinander verlaufen. (6 BE)

   (c) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S von E und g_2 sowie den Winkel φ zwischen g_2 und der Lotgeraden zu E in S.
   [Teilergebnis: $S(-1|1|3)$] (7 BE)

2. (a) $Q(-2|2|-1)$ ist ein Punkt der Geraden g_2. Bestimmen Sie auf der Geraden g_1 den Punkt R so, dass die Gerade QR senkrecht zu g_1 verläuft.
   [Ergebnis: $R(0|3|1)$] (7 BE)

   (b) Fertigen Sie eine Skizze an, aus der die Lagebeziehungen aller bisher vorkommenden geometrischen Elemente hervorgehen. (6 BE)

   (c) Weisen Sie nach, dass das Dreieck QRS gleichschenklig-rechtwinklig ist, und berechnen Sie seinen Flächeninhalt J. (7 BE)

Analytische Geometrie II

Gegeben sind in einem kartesischen Koordinatensystem die Punkte $A(1|2|2)$,$P(2|-3|5)$ und die Ebene

$$E_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \ \lambda, \sigma \in \mathbb{R}.$$

1. (a) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{AP}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ linear unabhängig sind. Was folgt daraus für die Lage des Punktes P bezüglich der Ebene E_1? (6 BE)

   (b) Stellen Sie eine Gleichung der Ebene E_1 in Normalenform auf.
   [Mögliches Ergebnis: $E_1 : x_3 - 2 = 0$]
   Welche besondere Lage hat E_1? (6 BE)

   (c) Der Punkt P^* und der Punkt P liegen bezüglich der Ebene E_1 spiegelbildlich zueinander. Berechnen Sie die Koordinaten von P^*. (5 BE)

   (d) Berechnen Sie den Flächeninhalt J des Dreiecks APP^*. (5 BE)

2. Gegeben ist weiter die Ebene $E_2 : 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 10 = 0$.

   (a) Zeigen Sie, dass der Punkt P in E_2 liegt. (2 BE)

   (b) Ermitteln Sie eine Gleichung der Schnittgeraden s der beiden Ebenen E_1 und E_2.

   [Mögliches Ergebnis: $s : \vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}$, $\mu \in \mathbb{R}$] (6 BE)

   (c) Berechnen Sie den Winkel φ zwischen den Normalenvektoren der Ebenen E_1 und E_2 (Ergebnis auf 2 Dezimalen gerundet). (3 BE)

   (d) Stellen Sie eine Gleichung der Ebene E_3 auf, die aus der Ebene E_2 durch Spiegelung an E_1 hervorgeht. (7 BE)

Wahrscheinlichkeitsrechnung I

Bei einer Unterhaltungssendung des Fernsehens wird ein Glücksrad mit 6 gleichen Sektoren verwendet. Dabei tragen 3 Sektoren eine Birne, 2 Sektoren einen Apfel und 1 Sektor ein Joker. Zwei Kandidaten K_1 und K_2 drehen nacheinander das Glücksrad. Dabei gewinnt jeweils „Apfel“ gegen „Birne“, „Joker“ gegen „Apfel“, und „Joker“ gegen „Birne“. Bei gleichen Symbolen endet das Spiel unentschieden.

1. Geben Sie alle möglichen Ergebnisse für das zweimalige Drehen des Glücksrades mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten an. (6 BE)

2. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignissse:

   E_1: „Kandidat K_1 gewinnt“,

   E_2: „K_1 oder K_2 gewinnt durch ‚Joker‘“,

   E_3: „Das Spiel geht unentschieden aus.“

   [Teilergebnis: $P(E_3) = \frac{7}{18}$] (6 BE)

3. (a) Beim Probelauf der Sendung wird das Spiel mit 10 Kandidatenpaaren je einmal durchgeführt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau 5 Spiele unentschieden enden? (4 BE)

   (b) Mit wievielen Kandidatenpaaren muss das Spiel mindestens durchgehührt werden, damit mit mehr als 95% Wahrscheinlichkeit wenigstens ein Spiel unentschieden ausgeht? (7 BE)

4. Bei einer Live-Sendung soll das Spiel bei „Unentschieden“ so lange wiederholt werden, bis einer der Kandidaten gewinnt.

   (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit muss ein Kandidatenpaar genau 3mal spielen? (4 BE)

   (b) Bei einem neuen Spiel hat Kandidat K_1 begonnen und das Symbol „Apfel“ erhalten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt er nun spätestens nach einer Wiederholung? (5 BE)

5. Mit zunehmender Zahl von Sendungen taucht die Vermutung auf, dass das Glücksrad etwas „eiert“, da „Birne“ häufiger als erwartet eintritt. Der Moderator der Sendung entschließt sich darum zu folgendem Experiment: Das Glücksrad wird 200mal gedreht. Nur wenn sich mindestens k-mal „Birne“ einstellt, wird die Vermutung „Glücksrad eiert“ angenommen. Wie groß muss die Schranke k mindestens gewählt werden, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Vermutung angenommen wird, obwohl sie nicht zutrifft, kleiner als 4% ist? (8 BE)

Wahrscheinlichkeitsrechnung II

Von den Seiten eines Laplace-Würfels (L-Würfel) sind drei Seiten mit der Ziffer 1 beschriftet, zwei Seiten mit der Ziffer 4 und eine Seite mit der Ziffer 6.

1. Der L-Würfel wird dreimal nacheinander geworfen und das Ergebnis als dreistellige Zahl notiert.

   (a) Wie viele verschiedene dreistellige Zahlen sind dabei möglich? (3 BE)

   (b) Wie viele verschiedene dreistellige Zahlen mit genau zwei gleichen Ziffern sind möglich? (4 BE)

2. Drei dieser L-Würfel werden gleichzeitig geworfen.

   (a) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse
   A: „Lauter gleiche Ziffern" und
   B: „Kein Würfel zeigt die Ziffer 6." (6 BE)

   (b) Aus drei geworfenen Ziffern bildet man durch Nebeneinanderlegen der Würfel eine möglichst große dreistellige Zahl M. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist $M > 140$?

3. Ein solcher L-Würfel werde nun 20mal nacheinander geworfen.

   (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheint dabei mehr als dreimal Ziffer 4? (4 BE)

   (b) Jemand wettet: „Es ergeben sich wenigstens 5, aber höchstens k Vierer." Welchen Wert muss k mindestens haben, damit seine Gewinnchance größer als 50% ist? (7 BE)

4. Jemand vermutet, bei einem wie oben beschrifteten Würfel handle es sich nicht um einen L-Würfel. Um dieser Vermutung nachzugehen, würfelt er 200mal und registiert die Anzahl Z der auftretenden Vierer. Beträgt Z mehr als 60, aber höchstens 77, so bewertet er den Würfel als L-Würfel, sonst als einen anderen.

   (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hält er einen L-Würfel für einen andern? (7 BE)

   (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hält er einen Würfel, bei dem die Ziffer 4 mit der Wahrscheinlichkeit $0,25$ fällt, für einen L-Würfel? (5 BE)