BAYERN Abitur 1987 Mathematik Grundkurs

Infinitesimalrechnung I

Gegeben ist die Funktion

$$f : x \mapsto \frac{2\mathrm{e}^x}{2 - \mathrm{e}^x}$$

mit maximalem Definitionsbereich $\mathbb{D}_f$. Ihr Graph sei G_f.

1. (a) Bestimmen Sie $\mathbb{D}_f$ und untersuchen Sie G_f auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen. (3 BE)

   (b) Untersuchen Sie das Verhalten von f an den Rändern von $\mathbb{D}_f$. (6 BE)

   (c) Ermitteln Sie das Monotonieverhalten von f, und geben Sie die Wertemenge $\mathbb{W}_f$ an. (6 BE)

   (d) Zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und von $f'(0)$ den Graphen G_f im Bereich $-5 \leq x \leq 5$ (Längeneinheit 1 cm). (6 BE)

2. (a) Zeigen Sie, dass $F : x \mapsto \ln \frac{1}{(2 - \mathrm{e}^x)^2}$ mit $x \in \mathbb{D}_f$ eine Stammfunktion von f ist. (4 BE)

   (b) Geben Sie die Integralfunktion

   $$I : x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

   $x \in \mathbb{R}_0^-$, in integralfreier Darstellung an, und bilden Sie $\lim\limits_{x \to -\infty} I(x)$.
   Wie lässt sich der Betrag des Grenzwertes graphisch deuten? (5 BE)

3. (a) Begründen Sie, dass f in ganz $\mathbb{D}_f$ umkehrbar ist. Bestimmen Sie die Umkehrfunktion $f^{-1} : x \mapsto f^{-1}(x)$ mit ihrem Definitionsbereich $\mathbb{D}_{f^{-1}}$. (7 BE)

   (b) Tragen Sie den Graphen $G_{f^{-1}}$ der Umkehrfunktion f^{-1} in das Koordinatensystem von Teilaufgabe 1d ein. (3 BE)

Infinitesimalrechnung II

Gegeben ist die Funktion

$$f : x \mapsto \frac{x}{x+2} + \frac{x}{x-2}$$

mit maximalem Definitionsbereich $\mathbb{D}_f$. Ihr Graph sei G_f.

1. (a) Bestimmen Sie $\mathbb{D}_f$ und untersuchen Sie G_f auf gemeinsame Punkte mit den Koordinatenachsen. (3 BE)

   (b) Untersuchen Sie das Verhalten von $f(x)$ für $x \to +\infty$ und in der Umgebung von $x = 2$. (4 BE)

   (c) Welche Symmetrieeigenschaft hat G_f? Begründen Sie Ihre Antwort. (Es empfiehlt sich, die beiden Brüche zusammenzufassen.) (2 BE)

   (d) Bestimmen Sie Lage und Art der Extrempunkte, ohne die 2. Ableitung von f zu verwenden. (6 BE)

   (e) Zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse den Graphen G_f im Bereich $-6 \leq x \leq 6$ (Längeneinheit 1 cm). (6 BE)

2. Gegeben ist ferner die Funktion $F : x \mapsto 2x + 2\ln\frac{x-2}{x+2}$ mit $\mathbb{D}_F =]2; \infty[$.

   (a) Zeigen Sie, dass für $x \in \mathbb{D}_F$ die Funktion F eine Stammfunktion von f ist. (6 BE)

   (b) Berechnen Sie in Abhängigkeit von b den Flächeninhalt $A(b)$ der Figur, die von G_f und den drei Geraden mit den Gleichungen $y = 2$, $x = 4$ und $x = b$ $(b > 2)$ eingeschlossen wird. (8 BE)

   (c) Untersuchen Sie das Verhalten von $A(b)$ für den Fall $b \to 2$ sowie für den Fall $b \to +\infty$. (5 BE)

Analytische Geometrie I

In einem kartesischem Koordinatensystem sind die Punkte $A(0|-4|1)$, $B(3|0|5)$, $C(5|-4|-3)$ und $P(8|-2|2)$ gegeben.

1. (a) Zeigen Sie, dass die Punkte A, B und C nicht auf einer Geraden liegen. (3 BE)

   (b) Die Ebene E geht durch den Punkt A und steht senkrecht auf der Geraden durch die Punkte B und C. Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform.
   [Zur Kontrolle: $E : x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 4 = 0$] (4 BE)

   (c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der Ebene E und der Geraden BC. Berechnen Sie den Abstand des Punktes A von der Geraden BC.
   [Zur Kontrolle: $S(4|-2|1)$] (9 BE)

2. Die Punkte A, B und C bestimmen eine Ebene H.

   (a) Geben Sie eine Gleichung der Ebene H in Parameterform an. (2 BE)

   (b) Zeigen Sie, dass der Punkt P nicht in der Ebene H liegt, aber ein Punkt der Ebene E (siehe 1b) ist. (5 BE)

   (c) Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden g, die durch den Punkt P geht, in der Ebene E liegt und zur Ebene H parallel ist. (10 BE)

   (d) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes Q, der zum Punkt P bezüglich der Geraden BC symmetrisch liegt. (7 BE)

Analytische Geometrie II

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Gerade

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -0,5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und die Punkte $A(-2|1|1)$, $B(-2|5|1)$ und $S(-8|3|6)$ gegeben.

1. (a) Zeigen Sie, dass A ein Punkt der Geraden g ist, aber B dieser Geraden nicht angehört. (3 BE)

   (b) Berechnen Sie die Größe des spitzen Winkels α, den die Gerade g und die Gerade AB einschließen. Geben Sie das Ergebnis in Grad an (auf zwei Dezimalstellen gerundet). (3 BE)

   (c) Da nun die Größe des Winkels α bekannt ist, bietet sich eine einfache Möglichkeit an, mit Hilfe der Länge der Strecke $[AB]$ den Abstand d des Punktes B von der Geraden g zu bestimmen. Fertigen Sie eine Skizze an, und ermitteln Sie d. (4 BE)

2. (a) Die Punkte A und B bilden mit einem Punkt C auf g ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit der Basis $[AB]$. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes C.
   [Ergebnis: $C(-3,5|3|1)$] (8 BE)

   (b) Geben Sie die Gleichung der Ebene ABC in Normalenform an, und bestimmen Sie den Abstand des Punktes S von dieser Ebene. (6 BE)

   (c) Zeigen Sie, dass der Fußpunkt F des Lotes von S auf die Ebene ABC ein Punkt der Symmetrieachse des Dreiecks ABC ist.
   [Teilergebnis: $F(-8|3|1)$] (8 BE)

   (d) Der Mittelpunkt der Strecke $[AB]$ sei M. In welchem Verhältnis teilt F die Höhe $[MC]$ des gleichschenkligen Dreiecks ABC außen bzw. innen? (4 BE)

3. Berechnen Sie die Koordinaten des Spiegelpunktes S' von S bezüglich der Ebene ABC (siehe 2). (4 BE)

Wahrscheinlichkeitsrechnung I

1. In einer Urne befinden sich 10 Kugeln. Sie sind mit den Zahlen 1 bis 10 beschriftet und sonst nicht unterscheidbar. Ein Zufallsexperiment besteht darin, gleichzeitig zwei dieser Kugeln zu ziehen und deren Zahlen zu betrachten.

   (a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
   $A :=$ „Es werden zwei gerade Zahlen gezogen“,
   $B :=$ „Es werden zwei benachbarte Zahlen gezogen“,
   $C :=$ „Beide Zahlen sind nicht größer als 6“,
   $D := A \cup C$. (12 BE)

   (b) Das obige Zufallsexperiment wird nun mehrfach mit Zurücklegen wiederholt. Wie oft muß es mindestens durchgeführt werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95% bei mindestens einer Ziehung die 10 dabei ist? (7 BE)

2. Das Ziehungsverfahren aus Aufgabe 1 wird nun geändert: Eine Kugel wird gezogen, ihre Zahl notiert. Ist die Zahl ungerade, wird die Kugel zurückgelegt und die zweite gezogen. Ist die erste Zahl gerade, folgt die Ziehung der zweiten Kugel, ohne dass die erste zurückgelegt wird. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

   $E :=$ „Die erste Zahl ist gerade“,

   $F :=$ „Die zweite Zahl ist gerade“. (7 BE)

3. Bei einem Volksfest behauptet der Festwirt, dass die Wahrscheinlichkeit, einen schlecht eingeschenkten Maßkrug zu bekommen, nur 10% beträgt. Die Behörde will kontrollieren, ob sich der Wirt an diese Aussage hält, und läßt an einem Tag die Füllmenge von 50 zufällig ausgewählten Krügen überprüfen (Stichprobe mit Zurücklegen).

   (a) Der Wirt will höchstens 3% Risiko eingehen, irrtümlich zur Rechenschaft gezogen zu werden. Welche Entscheidungsregel schlägt er der Behörde bei deren Stichprobe vor? (7 BE)

   (b) Die Behörde will aber schon bei 7 bemängelten Krügen einschreiten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird der Wirt zu Unrecht belangt? (7 BE)

Wahrscheinlichkeitsrechnung II

In einer Urne liegen 8 Kugeln, die nur durch ihre Farbe unterscheidbar sind: 4 grüne, 3 rote un 1 weiße Kugel.

1. Folgendes Experiment wird vereinbart: Es wird eine Kugel gezogen, ihre Farbe notiert und die Kugel in die Urne zurückgemischt. Dieses Verfahren wird zweimal durchgeführt. Beim Ergebnis soll die Reihenfolge der Farben nicht berücksichtigt werden.

   (a) Bestimmen Sie z. B. mit Hilfe eines Baumdiagramms alle möglichen Ergebnisse (Kombinationen von je zwei Farben ohne Berücksichtigung der Anordnung) mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten. (10 BE)

   (b) Es wird nun folgendes Spiel vereinbart: Die Kombination von zwei verschiedenfarbigen Kugeln ist eine Niete, die Kombination von zwei gleichfarbigen Kugeln ein Treffer. Die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer werde mit $p_{\mathbf{T}}$ bezeichnet. Wie oft muss man spielen, um mit mehr als 98% Wahrscheinlichkeit mindestens einen Treffer zu erzielen? (8 BE)

   (c) Im Folgenden soll zur Vereinfachung für $p_{\mathbf{T}}$ (sieh 1.b) der Näherungswert $0,4$ verwendet werden. Ein Gerücht lautet, dass in der Urne die Kugeln anders gemischt sind und die Trefferwahrscheinlichkeiten $p_{\mathbf{T}} \neq 0,4$ sei. Zur Überprüfung des Grüchts wird 200mal das in 1.b beschriebene Spiel durchgeführt. Wenn die Zahl der Treffer mindestens 70 und höchstens 90 beträgt, soll das Gerücht verworfen werden, andernfalls wird es für wahr gehalten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird das Gerücht für wahr gehalten, obwohl an der Mischung der Kugeln nichts verändert worden ist? (9 BE)

2. Nun wird das Ziehungsverfahren abgeändert. Es werden mit einem Griff 3 Kugeln aus der Urne entnommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den gezogenen Kugeln genau zwei gleichfarbig sind? (6 BE)

3. Alle Kugeln der Urne werden nun als Kette ringförmig aneinandergereiht. Wie viele verschiedene Möglichkeiten der Anordnung gibt es, wenn gleichfarbige Kugeln nicht unterscheidbar sind? Erläutern Sie ihre Rechnung. (7 BE)