Mathematik

Abiturprüfung 2017

Prüfungsteil A

Arbeitszeit: 90 Minuten

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen **keine Hilfsmittel** verwendet werden.

Zu den Themengebieten Analysis, Stochastik und Geometrie wählt der Fachausschuss jeweils eine Aufgabengruppe zur Bearbeitung aus. **Die zu einer Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil A dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.**

____
Name des Prüflings

Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist abzugeben.

Analysis

Aufgabengruppe 1

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

1 Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto 2 \cdot \sqrt{4+x} - 1$ mit maximaler Definitionsmenge D_g. Der Graph von g wird mit G_g bezeichnet.

2 **a)** Geben Sie D_g und die Koordinaten des Schnittpunkts von G_g mit der y-Achse an.

4 **b)** Beschreiben Sie, wie G_g schrittweise aus dem Graphen der in $\mathbb{R}_0^+$ definierten Funktion $w: x \mapsto \sqrt{x}$ hervorgeht, und geben Sie die Wertemenge von g an.

2 Eine Funktion f ist durch $f(x) = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 1$ mit $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

2 **a)** Ermitteln Sie die Nullstelle der Funktion f.

3 **b)** Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $S(0|1)$ begrenzt mit den beiden Koordinatenachsen ein Dreieck. Weisen Sie nach, dass dieses Dreieck gleichschenklig ist.

3 Geben Sie jeweils den Term einer Funktion an, die über ihrer maximalen Definitionsmenge die angegebenen Eigenschaften besitzt.

2 **a)** Der Graph der Funktion f ist achsensymmetrisch zur y-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = 2$ ist eine senkrechte Asymptote.

2 **b)** Die Funktion g ist nicht konstant und es gilt $\int_0^2 g(x)\,dx = 0$.

4 An einer Messstation wurde über einen Zeitraum von 10 Stunden die Anzahl der Pollen in einem Kubikmeter Luft ermittelt. Dabei kann die Anzahl der Pollen in einem Kubikmeter Luft zum Zeitpunkt t (in Stunden nach Beginn der Messung) durch die Gleichung $n(t) = 3t^2 - 60t + 500$ beschrieben werden.

3 **a)** Bestimmen Sie die mittlere Änderungsrate der Anzahl der Pollen in einem Kubikmeter Luft während der ersten beiden Stunden der Messung.

2 **b)** Ermitteln Sie den Zeitpunkt nach Beginn der Messung, zu dem die momentane Änderungsrate der Anzahl der Pollen in einem Kubikmeter Luft $-30\,\frac{1}{h}$ beträgt.

20

Analysis

Aufgabengruppe 2

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

1 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\frac{(3+x)^2}{x-1}$ und maximalem Definitionsbereich D. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

3 **a)** Geben Sie D und die Koordinaten der Schnittpunkte von G_f mit den Koordinatenachsen an.

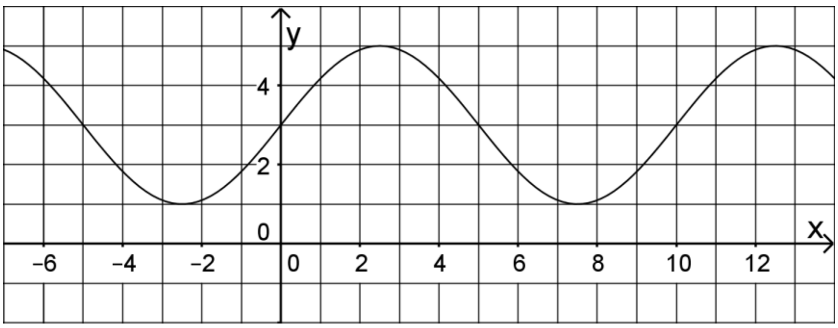
3 **b)** Zeigen Sie, dass $f(x)$ zum Term $x+7+\frac{16}{x-1}$ äquivalent ist, und geben Sie die Bedeutung der Geraden g mit der Gleichung $y=x+7$ für G_f an.

2 Eine Funktion f ist durch $f(x)=2\cdot e^{\frac{1}{2}x}-1$ mit $x\in\mathbb{R}$ gegeben.

2 **a)** Ermitteln Sie die Nullstelle der Funktion f.

3 **b)** Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $S(0|1)$ begrenzt mit den beiden Koordinatenachsen ein Dreieck. Weisen Sie nach, dass dieses Dreieck gleichschenklig ist.

3 Die Abbildung zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $g: x \mapsto p+q\cdot\sin\left(\frac{\pi}{r}x\right)$ mit $p,q,r\in\mathbb{N}$.



3 **a)** Geben Sie p, q und r an.

1 **b)** Der Graph der Funktion h geht aus dem Graphen der Funktion g durch Verschiebung um zwei Einheiten in positive x-Richtung hervor. Geben Sie einen möglichen Funktionsterm von h an.

(Fortsetzung nächste Seite)

4 An einer Messstation wurde über einen Zeitraum von 10 Stunden die Anzahl der Pollen in einem Kubikmeter Luft ermittelt. Dabei kann die Anzahl der Pollen in einem Kubikmeter Luft zum Zeitpunkt t (in Stunden nach Beginn der Messung) durch die Gleichung $n(t) = 3t^2 - 60t + 500$ beschrieben werden.

3 **a)** Bestimmen Sie die mittlere Änderungsrate der Anzahl der Pollen in einem Kubikmeter Luft während der ersten beiden Stunden der Messung.

2 **b)** Ermitteln Sie den Zeitpunkt nach Beginn der Messung, zu dem die momentane Änderungsrate der Anzahl der Pollen in einem Kubikmeter Luft $-30\,\frac{1}{h}$ beträgt.

20

Stochastik

Aufgabengruppe 1

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

1 Ein Glücksrad hat drei Sektoren, einen blauen, einen gelben und einen roten. Diese sind unterschiedlich groß. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim einmaligen Drehen der blaue Sektor getroffen wird, beträgt p.

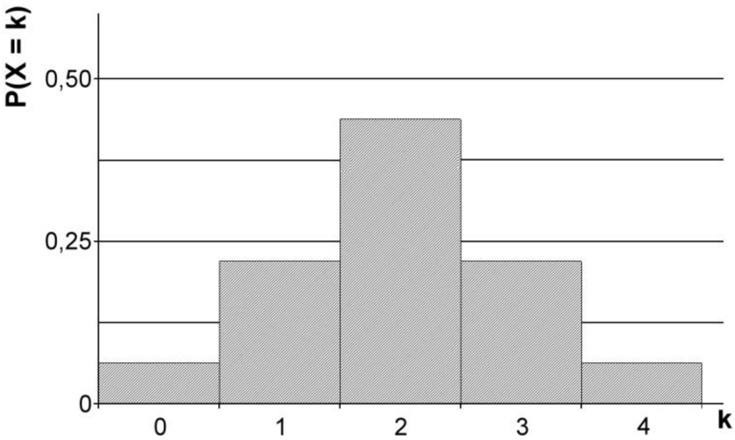
2 **a)** Interpretieren Sie den Term $(1-p)^7$ im Sachzusammenhang.

1 **b)** Das Glücksrad wird zehnmal gedreht. Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet werden kann, dass der blaue Sektor genau zweimal getroffen wird.

2 **c)** Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim einmaligen Drehen der gelbe Sektor getroffen wird, beträgt 50%. Felix hat 100 Drehungen des Glücksrads beobachtet und festgestellt, dass bei diesen der Anteil der Drehungen, bei denen der gelbe Sektor getroffen wurde, deutlich geringer als 50% war. Er folgert: „Der Anteil der Drehungen, bei denen der gelbe Sektor getroffen wird, muss also bei den nächsten 100 Drehungen deutlich größer als 50% sein." Beurteilen Sie die Aussage von Felix.

2 **d)** Das Glücksrad wird viermal gedreht und die Abfolge der Farben als Ergebnis notiert. Bestimmen Sie die Anzahl der möglichen Ergebnisse, in denen die Farbe Blau nicht vorkommt.

3 **2** In der Abbildung ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße X mit der Wertemenge $\{0;1;2;3;4\}$ und dem Erwartungswert 2 dargestellt. Weisen Sie nach, dass es sich dabei nicht um eine Binomialverteilung handeln kann.



10

Stochastik

Aufgabengruppe 2

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

3 **1 a)** Nebenstehende Vierfeldertafel gehört zu einem Zufallsexperiment mit den stochastisch unabhängigen Ereignissen A und B. Tragen Sie alle fehlenden Wahrscheinlichkeiten ein.

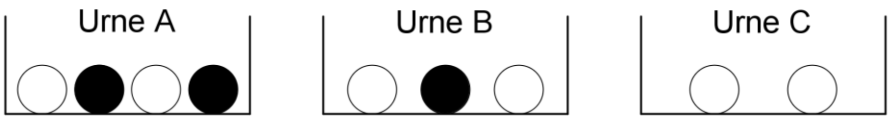
	A	$\overline{A}$	
B	0,12		
$\overline{B}$			
	0,3		

2 **b)** Im Vorfeld einer Wahl wird eine wahlberechtigte Person zufällig ausgewählt und befragt. Betrachtet werden folgende Ereignisse:

C: „Die Person ist älter als 50 Jahre.“
D: „Die Person will die derzeitige Regierungspartei wählen.“

Erläutern Sie, was in diesem Sachzusammenhang eine stochastische Unabhängigkeit der Ereignisse C und D bedeuten würde.

2 Schwarze und weiße Kugeln sind wie folgt auf drei Urnen verteilt:



2 **a)** Aus Urne A wird zunächst eine Kugel zufällig entnommen und in Urne B gelegt. Anschließend wird aus Urne B eine Kugel zufällig entnommen und in Urne C gelegt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich danach in Urne C zwei weiße Kugeln und eine schwarze Kugel befinden.

3 **b)** Die drei Urnen mit den in der Abbildung dargestellten Inhalten bilden den Ausgangspunkt für folgendes Spiel:

Es wird zunächst ein Einsatz von 1 € eingezahlt. Anschließend wird eine der drei Urnen zufällig ausgewählt und danach aus dieser Urne eine Kugel zufällig gezogen. Nur dann, wenn diese Kugel schwarz ist, wird ein bestimmter Geldbetrag ausgezahlt.

Ermitteln Sie, wie groß dieser Geldbetrag sein muss, damit bei diesem Spiel auf lange Sicht Einsätze und Auszahlungen ausgeglichen sind.

10

Geometrie

Aufgabengruppe 1

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

1 Gegeben sind die Punkte $A(2|1|-4)$, $B(6|1|-12)$ und $C(0|1|0)$.

3 **a)** Weisen Sie nach, dass der Punkt C auf der Geraden AB, nicht aber auf der Strecke $[AB]$ liegt.

2 **b)** Auf der Strecke $[AB]$ gibt es einen Punkt D, der von B dreimal so weit entfernt ist wie von A. Bestimmen Sie die Koordinaten von D.

2 Gegeben ist die Ebene $E: 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -18$.

2 **a)** Der Schnittpunkt von E mit der x_1-Achse, der Schnittpunkt von E mit der x_2-Achse und der Koordinatenursprung sind die Eckpunkte eines Dreiecks. Bestimmen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

3 **b)** Ermitteln Sie die Koordinaten des Vektors, der sowohl ein Normalenvektor von E als auch der Ortsvektor eines Punktes der Ebene E ist.

10

Geometrie

Aufgabengruppe 2

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

1 Gegeben sind die beiden bezüglich der x_1x_3-Ebene symmetrisch liegenden Punkte $A(2|3|1)$ und $B(2|-3|1)$ sowie der Punkt $C(0|2|0)$.

3 **a)** Weisen Sie nach, dass das Dreieck ABC bei C rechtwinklig ist.

2 **b)** Geben Sie die Koordinaten eines weiteren Punkts D der x_2-Achse an, so dass das Dreieck ABD bei D rechtwinklig ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

2 Gegeben ist die Ebene $E: 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -18$.

2 **a)** Der Schnittpunkt von E mit der x_1-Achse, der Schnittpunkt von E mit der x_2-Achse und der Koordinatenursprung sind die Eckpunkte eines Dreiecks. Bestimmen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

3 **b)** Ermitteln Sie die Koordinaten des Vektors, der sowohl ein Normalenvektor von E als auch der Ortsvektor eines Punkts der Ebene E ist.

10

Mathematik

Abiturprüfung 2017

Prüfungsteil B

Arbeitszeit: 180 Minuten

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen als Hilfsmittel verwendet werden

- die vom Staatsministerium genehmigte Merkhilfe für das Fach Mathematik,
- eine der vom Staatsministerium zugelassenen stochastischen Tabellen,
- eine der vom Staatsministerium für Leistungserhebungen zugelassenen naturwissenschaftlichen Formelsammlungen,
- ein Taschenrechner, der hinsichtlich seiner Funktionalität den vom Staatsministerium getroffenen Regelungen entspricht.

Zu den Themengebieten Analysis, Stochastik und Geometrie wählt der Fachausschuss jeweils eine Aufgabengruppe zur Bearbeitung aus. **Die zu einer Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil A bearbeitet werden.**

____
Name des Prüflings

Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist abzugeben.

Analysis

Aufgabengruppe 1

BE

1 Gegeben ist die in $\mathbb{R}^+$ definierte Funktion $h: x \mapsto 3x \cdot (-1 + \ln x)$. Abbildung 1 zeigt den Graphen G_h von h im Bereich $0{,}75 \leq x \leq 4$.

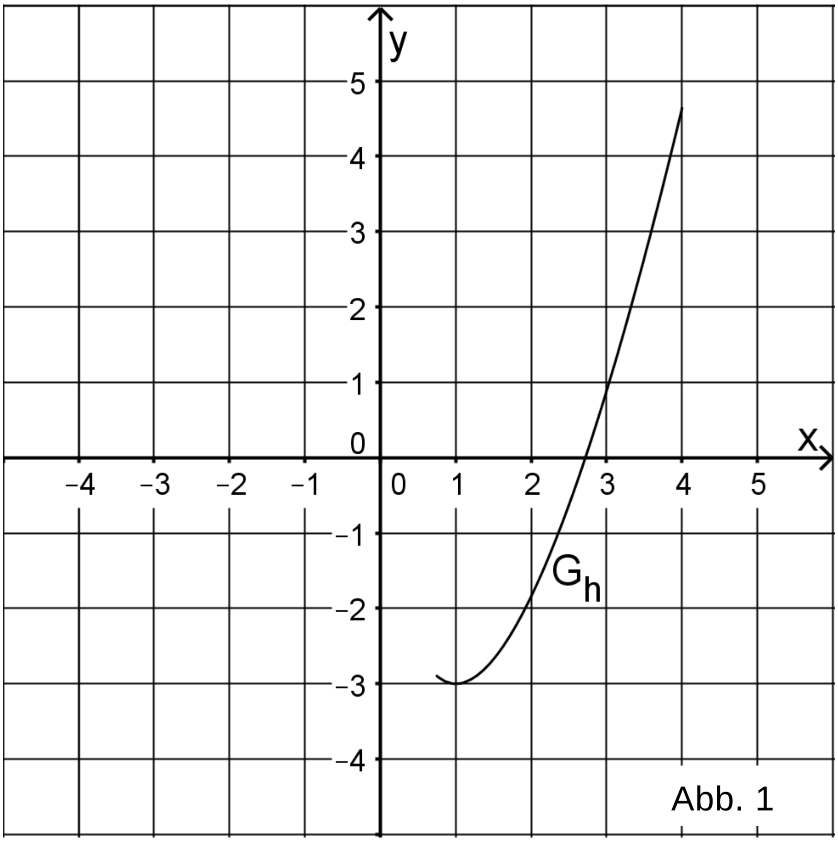


Abb. 1

4 **a)** Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an G_h im Punkt $(e\,|\,0)$ und berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem diese Tangente die x-Achse schneidet.

(zur Kontrolle: $h'(x) = 3 \cdot \ln x$)

4 **b)** Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von G_h. Geben Sie den Grenzwert von h für $x \to +\infty$ an und begründen Sie, dass $[-3; +\infty[$ die Wertemenge von h ist.

3 **c)** Geben Sie für die Funktion h und deren Ableitungsfunktion h' jeweils das Verhalten für $x \to 0$ an und zeichnen Sie G_h im Bereich $0 < x < 0{,}75$ in Abbildung 1 ein.

Die Funktion $h^*: x \mapsto h(x)$ mit Definitionsmenge $[1; +\infty[$ unterscheidet sich von der Funktion h nur hinsichtlich der Definitionsmenge. Im Gegensatz zu h ist die Funktion h^* umkehrbar.

(Fortsetzung nächste Seite)

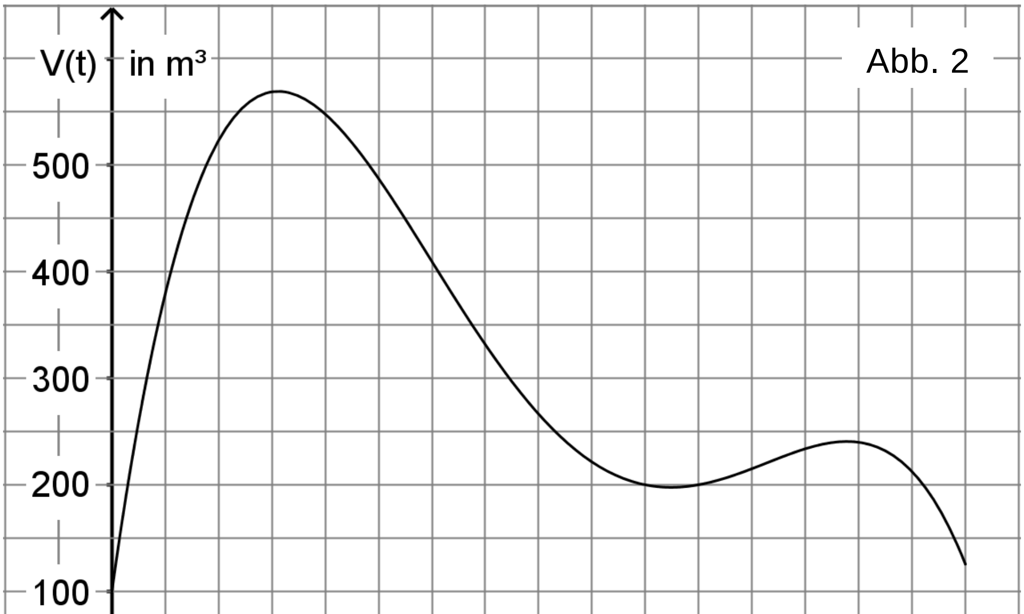
4 **d)** Geben Sie die Definitionsmenge und die Wertemenge der Umkehrfunktion von h^* an. Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts S des Graphen von h^* und der Geraden mit der Gleichung $y = x$.

(Teilergebnis: x-Koordinate des Schnittpunkts: $e^{\frac{4}{3}}$)

3 **e)** Zeichnen Sie den Graphen der Umkehrfunktion von h^* unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse, insbesondere der Lage von Punkt S, in Abbildung 1 ein.

4 **f)** Schraffieren Sie in Abbildung 1 ein Flächenstück, dessen Inhalt A_0 dem Wert des Integrals $\int_e^{x_s} \left(x - h^*(x)\right) dx$ entspricht, wobei x_S die x-Koordinate von Punkt S ist. Der Graph von h^*, der Graph der Umkehrfunktion von h^* sowie die beiden Koordinatenachsen schließen im ersten Quadranten ein Flächenstück mit Inhalt A ein. Geben Sie unter Verwendung von A_0 einen Term zur Berechnung von A an.

2 Abbildung 2 zeigt den Graphen einer in $[0;16]$ definierten Funktion $V: t \mapsto V(t)$. Sie beschreibt modellhaft das sich durch Zu- und Abfluss ändernde Volumen von Wasser in einem Becken in Abhängigkeit von der Zeit. Dabei bezeichnen t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und $V(t)$ das Volumen in Kubikmetern.



(Fortsetzung nächste Seite)

2 **a)** Geben Sie mithilfe von Abbildung 2 jeweils näherungsweise das Volumen des Wassers fünf Stunden nach Beobachtungsbeginn sowie den Zeitraum an, in dem das Volumen mindestens $450\,m^3$ beträgt.

3 **b)** Bestimmen Sie anhand des Graphen der Funktion V näherungsweise die momentane Änderungsrate des Wasservolumens zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn.

3 **c)** Erläutern Sie, was es im Sachzusammenhang bedeutet, wenn für ein $t \in [0;10]$ die Beziehung $V(t+6) = V(t) - 350$ gilt. Entscheiden Sie mithilfe von Abbildung 2, ob für $t = 5$ diese Beziehung gilt, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

In einem anderen Becken ändert sich das Volumen des darin enthaltenen Wassers ebenfalls durch Zu- und Abfluss. Die momentane Änderungsrate des Volumens wird für $0 \leq t \leq 12$ modellhaft durch die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $g: t \mapsto 0{,}4 \cdot \left(2t^3 - 39t^2 + 180t\right)$ beschrieben. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und $g(t)$ die momentane Änderungsrate des Volumens in $\frac{m^3}{h}$.

4 **d)** Begründen Sie, dass die Funktionswerte von g für $0 < t < 7{,}5$ positiv und für $7{,}5 < t < 12$ negativ sind.

6 **e)** Erläutern Sie die Bedeutung des Werts des Integrals $\int_a^b g(t)\,dt$ für $0 \leq a < b \leq 12$ im Sachzusammenhang. Berechnen Sie das Volumen des Wassers, das sich 7,5 Stunden nach Beobachtungsbeginn im Becken befindet, wenn zu Beobachtungsbeginn $150\,m^3$ Wasser im Becken waren. Begründen Sie, dass es sich hierbei um das maximale Wasservolumen im Beobachtungszeitraum handelt.

40

Analysis

Aufgabengruppe 2

BE

1 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2e^{-x} \cdot \left(2e^{-x} - 1\right)$ und $x \in \mathbb{R}$. Abbildung 1 zeigt den Graphen G_f von f sowie die einzige Nullstelle $x = \ln 2$ von f.

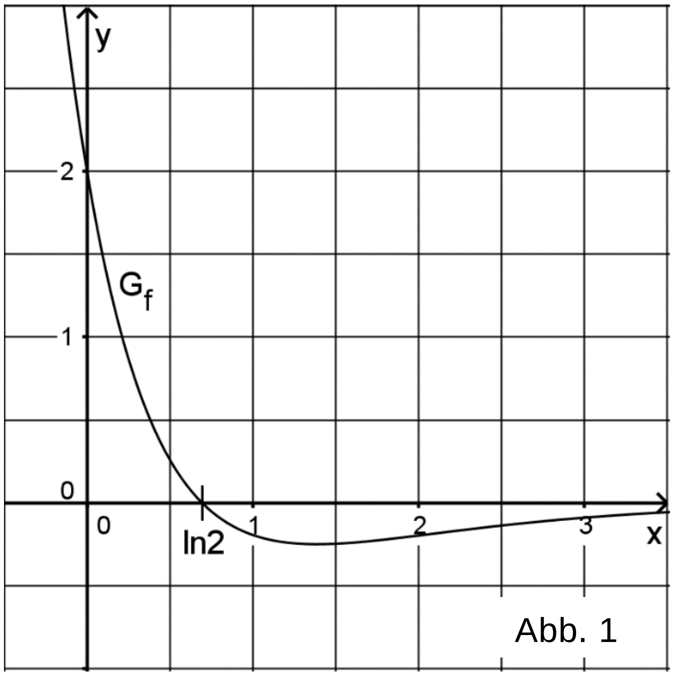


Abb. 1

3 **a)** Zeigen Sie, dass für den Term der Ableitungsfunktion f' von f gilt: $f'(x) = 2e^{-x} \cdot \left(1 - 4e^{-x}\right)$.

4 **b)** Bestimmen Sie rechnerisch Lage und Art des Extrempunkts von G_f.

(Teilergebnis: x-Koordinate des Extrempunkts: $\ln 4$)

Zusätzlich ist die Funktion F mit $F(x) = 2e^{-x} - 2e^{-2x}$ und $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

3 **c)** Zeigen Sie, dass F eine Stammfunktion von f ist, und begründen Sie anhand des Terms von F, dass $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0$ gilt.

5 **d)** Der Graph von F verläuft durch den Punkt $(\ln 2 \,|\, 0{,}5)$. Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass F keine größeren Werte als $0{,}5$ annehmen kann und bei $x = \ln 4$ eine Wendestelle besitzt. Berechnen Sie die y-Koordinate des zugehörigen Wendepunkts.

4 **e)** Zeichnen Sie den Graphen von F unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse sowie des Funktionswerts $F(0)$ im Bereich $-0{,}3 \le x \le 3{,}5$ in Abbildung 1 ein.

4 **f)** Der Graph von f schließt mit den Koordinatenachsen ein Flächenstück ein, das durch das Dreieck mit den Eckpunkten $O(0\,|\,0)$, $P(\ln 2\,|\,0)$ und $Q(0\,|\,2)$ angenähert werden kann. Berechnen Sie, um wie viel Prozent der Flächeninhalt des Dreiecks OPQ vom Inhalt des Flächenstücks abweicht.

(Fortsetzung nächste Seite)

Betrachtet wird nun die Integralfunktion F_0 mit $F_0(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ und $x \in \mathbb{R}$.

4 **g)** Begründen Sie, dass F_0 mit der betrachteten Stammfunktion F von f übereinstimmt. Interpretieren Sie geometrisch den Wert $F_0(2) \approx 0{,}234$ mithilfe von in Abbildung 1 geeignet zu markierenden Flächenstücken.

2 **h)** Geben Sie den Term einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion an, die eine Stammfunktion, aber keine Integralfunktion von f ist.

2 Zur Modellierung einer Zerfallsreihe wird vereinfachend davon ausgegangen, dass sich in einem Gefäß zu Beginn eines Beobachtungszeitraums ausschließlich der radioaktive Stoff Bi 211 befindet. Jeder Atomkern dieses Stoffs Bi 211 wandelt sich irgendwann in einen Kern des radioaktiven Stoffs Tl 207 um und dieser wiederum irgendwann in einen Kern des Stoffs Pb 207. Abbildung 2 zeigt diese Zerfallsreihe schematisch.

Abb. 2

Der zeitliche Verlauf des Bi 211-Anteils, des Tl 207-Anteils und des Pb 207-Anteils der Kerne im Gefäß lässt sich durch die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen B, F bzw. P beschreiben, deren Terme der folgenden Tabelle zu entnehmen sind. Dabei ist F die in Aufgabe 1 betrachtete Funktion.

Bi 211	Tl 207	Pb 207
$B(x) = e^{-2x}$	$F(x)$	$P(x) = 1 - B(x) - F(x)$

Für jede der drei Funktionen bezeichnet $x \geq 0$ die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in der Einheit 6 Minuten. Beispielsweise bedeutet $P(1) \approx 0{,}400$, dass sechs Minuten nach Beginn der Beobachtung etwa $40{,}0\%$ aller Kerne im Gefäß Pb 207-Kerne sind.

4 **a)** Bestimmen Sie jeweils auf zehntel Prozent genau die Anteile der drei Kernsorten zwölf Minuten nach Beobachtungsbeginn.

2 **b)** Ermitteln Sie unter Verwendung von Ergebnissen aus Aufgabe 1 den Zeitpunkt auf Sekunden genau, zu dem der Anteil von Tl 207-Kernen im Gefäß am größten ist.

3 **c)** Begründen Sie rechnerisch, dass zu keinem Zeitpunkt die Anteile der drei Kernsorten gleich groß sind.

2 **d)** Weisen Sie mithilfe des Terms der Funktion P nach, dass $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = 1$ gilt, und interpretieren Sie diesen Grenzwert im Sachzusammenhang.

40

Stochastik

Aufgabengruppe 1

BE

Das elektronische Stabilitätsprogramm (ESP) eines Autos kann Schleuderbewegungen und damit Unfälle verhindern.

1 Gehen Sie bei den folgenden Aufgaben davon aus, dass 40 % aller Autos mit ESP ausgerüstet sind.

200 Autos werden nacheinander zufällig ausgewählt; die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der ausgewählten Autos mit ESP.

3 **a)** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den ausgewählten Autos mindestens 70 mit ESP ausgerüstet sind.

7 **b)** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse.

A: „Das fünfte ausgewählte Auto ist das erste mit ESP."

B: „Die Zufallsgröße X nimmt einen Wert an, der von ihrem Erwartungswert höchstens um eine Standardabweichung abweicht."

2 In einem Parkhaus befinden sich insgesamt 100 Parkplätze.

3 **a)** Im Parkhaus sind 20 Parkplätze frei; vier Autofahrer suchen jeweils einen Parkplatz. Formulieren Sie in diesem Sachzusammenhang zu den folgenden Termen jeweils eine Aufgabenstellung, deren Lösung sich durch den Term berechnen lässt.

α) $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17$ **β)** $\binom{20}{4}$

Das Parkhaus ist nun mit 100 Autos besetzt, von denen 40 mit ESP ausgerüstet sind.

3 **b)** Sieben von diesen 100 Autos sind Kleinwagen und nicht mit ESP ausgerüstet, 90 sind keine Kleinwagen. Betrachtet werden folgende Ereignisse.

E: „Ein im Parkhaus zufällig ausgewähltes Auto ist mit ESP ausgerüstet."

K: „Bei einem im Parkhaus zufällig ausgewählten Auto handelt es sich um einen Kleinwagen."

Geben Sie die Bedeutung von $P_K(E)$ im Sachzusammenhang an und ermitteln Sie diese Wahrscheinlichkeit.

(Fortsetzung nächste Seite)

4 **c)** 30 der im Parkhaus stehenden Autos werden zufällig ausgewählt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass darunter genau 40 % mit ESP ausgerüstet sind.

20

Stochastik

Aufgabengruppe 2

BE

Ein Großhändler bietet Samenkörner für Salatgurken in zwei Qualitätsstufen an. Ein Samenkorn der höheren Qualität A keimt mit einer Wahrscheinlichkeit von 95%, eines der Qualität B mit einer Wahrscheinlichkeit von 70%. Ein Anbaubetrieb kauft Samenkörner beider Qualitätsstufen, 65% aller gekauften Samenkörner sind von der Qualität A.

5 **a)** In einem Gedankenexperiment werden die eingekauften Samenkörner zusammengeschüttet und gemischt. Bestimmen Sie mithilfe eines beschrifteten Baumdiagramms

α) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewähltes Samenkorn keimt;

β) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewähltes Samenkorn, das nach der Saat keimt, von der Qualität B ist.

3 **b)** Der Anbaubetrieb sät 200 Samenkörner der Qualität B. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

E: „Von den gesäten Samenkörnern keimen genau 140.“

F: „Von den gesäten Samenkörnern keimen mehr als 130 und weniger als 150.“

2 **c)** Beschreiben Sie im Sachzusammenhang die Bedeutung des Terms $1-P(X \geq 275)$, wobei X eine binomial verteilte Zufallsgröße mit den Parametern $n=300$ und $p=0{,}95$ bezeichnet.

5 **d)** Keimt ein Samenkorn, so wächst daraus eine Pflanze heran, die aufgrund schädlicher Einflüsse jedoch in manchen Fällen keine Gurken trägt. Bei einem gekeimten Samenkorn der Qualität A entsteht mit einer Wahrscheinlichkeit von 85% eine fruchttragende Pflanze, bei einem gekeimten Samenkorn der Qualität B mit einer Wahrscheinlichkeit von 75%. Vereinfachend wird davon ausgegangen, dass - unabhängig von der Qualität der Samenkörner - von jeder fruchttragenden Pflanze gleich viele Gurken geerntet werden können.
Ein Samenkorn der Qualität A kostet 17 Cent, eines der Qualität B 12 Cent. Entscheiden Sie durch Rechnung, ob es für einen Anbaubetrieb finanziell günstiger ist, sich auf Samenkörner der Qualität A zu beschränken, oder ob es finanziell günstiger ist, sich auf Samenkörner der Qualität B zu beschränken, wenn er alle Gurken zum selben Preis verkauft.

(Fortsetzung nächste Seite)

5 **e)** Der Großhändler behauptet, dass sich die Wahrscheinlichkeit für das Keimen eines Samenkorns der Qualität B durch eine veränderte Aufbereitung des Saatguts auf mehr als 70% erhöht hat. Deshalb soll die Nullhypothese „Die Wahrscheinlichkeit für das Keimen eines Samenkorns der Qualität B ist höchstens 70%.“ auf einem Signifikanzniveau von 5% getestet werden. Dazu werden 100 der verändert aufbereiteten Samenkörner der Qualität B zufällig ausgewählt und gesät. Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

20

Geometrie

Aufgabengruppe 1

BE

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(0|0|1)$, $B(2|6|1)$, $C(-4|8|5)$ und $D(-6|2|5)$ gegeben. Sie liegen in einer Ebene E und bilden ein Viereck $ABCD$, dessen Diagonalen sich im Punkt M schneiden.

1 **a)** Begründen Sie, dass die Gerade AB parallel zur x_1x_2-Ebene verläuft.

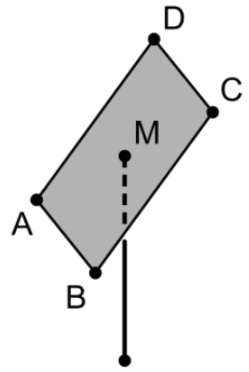
4 **b)** Weisen Sie nach, dass das Viereck $ABCD$ ein Rechteck ist. Bestimmen Sie die Koordinaten von M.

(Teilergebnis: $M(-2|4|3)$)

3 **c)** Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform.

(mögliches Ergebnis: $E: 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 5 = 0$)

Ein Solarmodul wird an einem Metallrohr befestigt, das auf einer horizontalen Fläche senkrecht steht. Das Solarmodul wird modellhaft durch das Rechteck $ABCD$ dargestellt. Das Metallrohr lässt sich durch eine Strecke, der Befestigungspunkt am Solarmodul durch den Punkt M beschreiben (vgl. Abbildung). Die horizontale Fläche liegt im Modell in der x_1x_2-Ebene des Koordinatensystems; eine Längeneinheit entspricht $0{,}8\,\text{m}$ in der Realität.



3 **d)** Um einen möglichst großen Energieertrag zu erzielen, sollte die Größe des Neigungswinkels φ des Solarmoduls gegenüber der Horizontalen zwischen 30° und 36° liegen. Prüfen Sie, ob diese Bedingung erfüllt ist.

5 **e)** Auf das Solarmodul fällt Sonnenlicht, das im Modell durch parallele Geraden dargestellt wird, die senkrecht zur Ebene E verlaufen. Das Solarmodul erzeugt auf der horizontalen Fläche einen rechteckigen Schatten. Zeigen Sie unter Verwendung einer geeignet beschrifteten Skizze, dass der Flächeninhalt des Schattens mithilfe des Terms $\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \frac{\left|\overrightarrow{AD}\right|}{\cos\varphi} \cdot (0{,}8\,\text{m})^2$ berechnet werden kann.

(Fortsetzung nächste Seite)

4 **f)** Um die Sonneneinstrahlung im Laufe des Tages möglichst effektiv zur Energiegewinnung nutzen zu können, lässt sich das Metallrohr mit dem Solarmodul um die Längsachse des Rohrs drehen. Die Größe des Neigungswinkels φ gegenüber der Horizontalen bleibt dabei unverändert. Betrachtet wird der Eckpunkt des Solarmoduls, der im Modell durch den Punkt A dargestellt wird. Berechnen Sie den Radius des Kreises, auf dem sich dieser Eckpunkt des Solarmoduls bei der Drehung des Metallrohrs bewegt, auf Zentimeter genau.

20

Geometrie

Aufgabengruppe 2

BE

Ein geschlossenes Zelt, das auf horizontalem Untergrund steht, hat die Form einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche. Die von der Zeltspitze ausgehenden Seitenkanten werden durch vier gleich lange Stangen gebildet. Das Zelt ist $6\,\text{m}$ hoch, die Seitenlänge des Zeltbodens beträgt $5\,\text{m}$.

Das Zelt wird in einem kartesischen Koordinatensystem (vgl. Abbildung 1) modellhaft durch eine Pyramide $ABCDS$ mit der Spitze $S(2{,}5\,|\,2{,}5\,|\,6)$ dargestellt. Der Punkt A liegt im Koordinatenursprung, C hat die Koordinaten $(5\,|\,5\,|\,0)$. Der Punkt B liegt auf der x_1-Achse, D auf der x_2-Achse. Das Dreieck CDS liegt in der Ebene $E: 12x_2 + 5x_3 = 60$. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Realität.

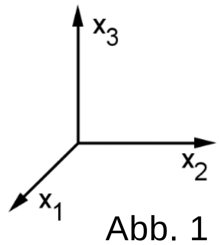


Abb. 1

3 **a)** Geben Sie die Koordinaten der Punkte B und D an und zeichnen Sie die Pyramide in ein Koordinatensystem ein.

3 **b)** Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene F, in der das Dreieck DAS liegt, in Normalenform.

(mögliches Ergebnis: $F: 12x_1 - 5x_3 = 0$)

3 **c)** Jeweils zwei benachbarte Zeltwände schließen im Inneren des Zelts einen stumpfen Winkel ein. Ermitteln Sie die Größe dieses Winkels.

4 **d)** Im Zelt ist eine Lichtquelle so aufgehängt, dass sie von jeder der vier Wände einen Abstand von $50\,\text{cm}$ hat. Ermitteln Sie die Koordinaten des Punkts, der im Modell die Lichtquelle darstellt.

2 **e)** Bestimmen Sie eine Gleichung der Symmetrieachse g des Dreiecks CDS.

5 **f)** Ein Teil der Zeltwand, die im Modell durch das Dreieck CDS dargestellt wird, kann mithilfe zweier vertikal stehender Stangen der Länge $1{,}80\,\text{m}$ zu einem horizontalen Vordach aufgespannt werden (vgl. Abbildung 2). Die dadurch entstehende $1{,}40\,\text{m}$ breite Öffnung in der Zeltwand wird im Modell durch ein Rechteck dargestellt, das symmetrisch zu g liegt. Dabei liegt eine Seite dieses Rechtecks auf der Strecke $[CD]$. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Vordachs.

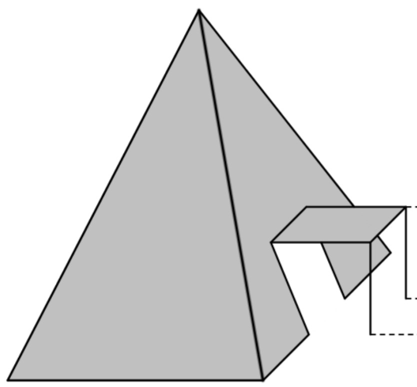


Abb. 2

20