

Mathematik

Abiturprüfung 2023

Prüfungsteil A

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen **keine Hilfsmittel** verwendet werden.

Zu den Themengebieten Analysis, Stochastik und Geometrie wählt der Fachausschuss jeweils eine Aufgabengruppe zur Bearbeitung aus. **Die zu einer Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil A dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.**

<hr/> <p>Name des Prüflings</p>

Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist abzugeben.

Analysis

Aufgabengruppe 1

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

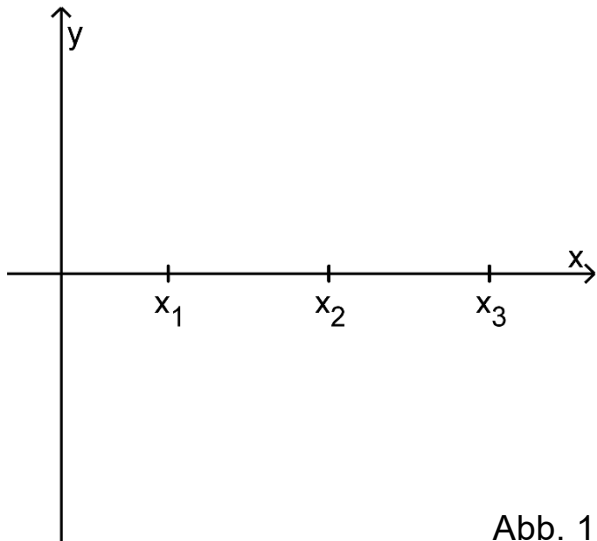
- BE**
- 1** Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \ln(x-3)$ mit maximaler Definitionsmenge D und Ableitungsfunktion f' .
- 2 **a)** Geben Sie D sowie die Nullstelle von f an.
- 3 **b)** Ermitteln Sie diejenige Stelle $x \in D$, für die $f'(x) = 2$ gilt.
- 2** Gegeben ist die in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definierte Funktion $g: x \mapsto \frac{1}{x^2} - 1$.
- 2 **a)** Geben Sie eine Gleichung der waagrechten Asymptote des Graphen von g sowie die Wertemenge von g an.
- 3 **b)** Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_{\frac{1}{2}}^2 g(x) dx$.
- 3** Eine in \mathbb{R} definierte ganzrationale, nicht lineare Funktion f mit erster Ableitungsfunktion f' und zweiter Ableitungsfunktion f'' hat folgende Eigenschaften:
- f hat bei x_1 eine Nullstelle.
 - Es gilt $f'(x_2) = 0$ und $f''(x_2) \neq 0$.
 - f' hat ein lokales Minimum an der Stelle x_3 .
- Abbildung 1 zeigt die Positionen von x_1 , x_2 und x_3 .
- 

Abb. 1
- 2 **a)** Begründen Sie, dass der Grad von f mindestens 3 ist.
- 3 **b)** Skizzieren Sie in Abbildung 1 einen möglichen Graphen von f .

(Fortsetzung nächste Seite)

4 Abbildung 2 zeigt den Graphen der in \mathbb{R} definierten Funktion g , dessen einzige Extrempunkte $(-1|1)$ und $(0|0)$ sind, sowie den Punkt P .

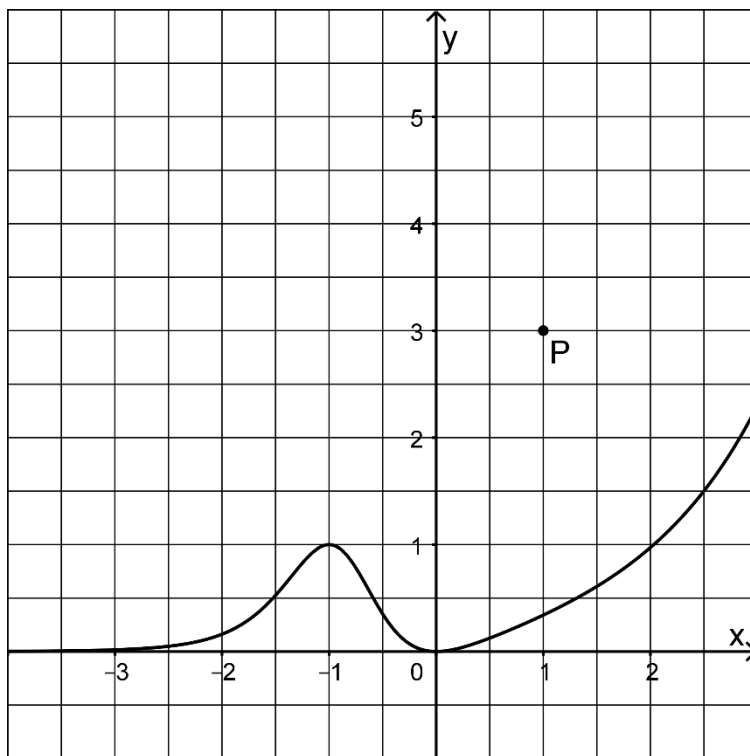


Abb. 2

- 2 a) Geben Sie die Koordinaten des Tiefpunkts des Graphen der in \mathbb{R} definierten Funktion h mit $h(x) = -g(x - 3)$ an.
- 3 b) Der Graph einer Stammfunktion von g verlauft durch P . Skizzieren Sie diesen Graphen in Abbildung 2.

Analysis

Aufgabengruppe 2

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

1 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{e^x}{e^x - 2}$ mit maximalem Definitionsbereich D.

3 a) Bestimmen Sie D und geben Sie die Koordinaten des Schnittpunkts des Graphen von f mit der y-Achse an.

2 b) Geben Sie einen Term der ersten Ableitungsfunktion von f an.

2 Gegeben ist die in \mathbb{R}_0^+ definierte Funktion $g: x \mapsto \sqrt{x} + 1$.

3 a) Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente an den Graphen von g im Punkt $(1|g(1))$.

2 b) Die Funktion g ist umkehrbar. Die Umkehrfunktion g^{-1} von g ist in $[1; +\infty[$ definiert. Bestimmen Sie einen Term von g^{-1} .

3 Gegeben ist die in \mathbb{R} definierte Funktion $f: x \mapsto -x^2 + 2ax$ mit $a \in]1; +\infty[$. Die Nullstellen von f sind 0 und 2a.

2 a) Zeigen Sie, dass das Flächenstück, das der Graph von f mit der x-Achse einschließt, den Inhalt $\frac{4}{3}a^3$ hat.

3 b) Der Hochpunkt des Graphen von f liegt auf einer Seite eines Quadrats; zwei Seiten dieses Quadrats liegen auf den Koordinatenachsen (vgl. Abbildung 1). Der Flächeninhalt des Quadrats stimmt mit dem Inhalt des Flächenstücks, das der Graph von f mit der x-Achse einschließt, überein. Bestimmen Sie den Wert von a.

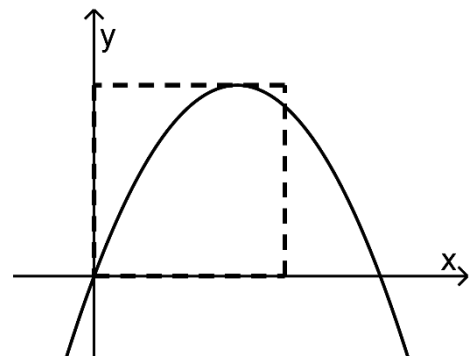


Abb. 1

(Fortsetzung nächste Seite)

4 Abbildung 2 zeigt den Graphen der in \mathbb{R} definierten Funktion g , dessen einzige Extrempunkte $(-1|1)$ und $(0|0)$ sind, sowie den Punkt P .

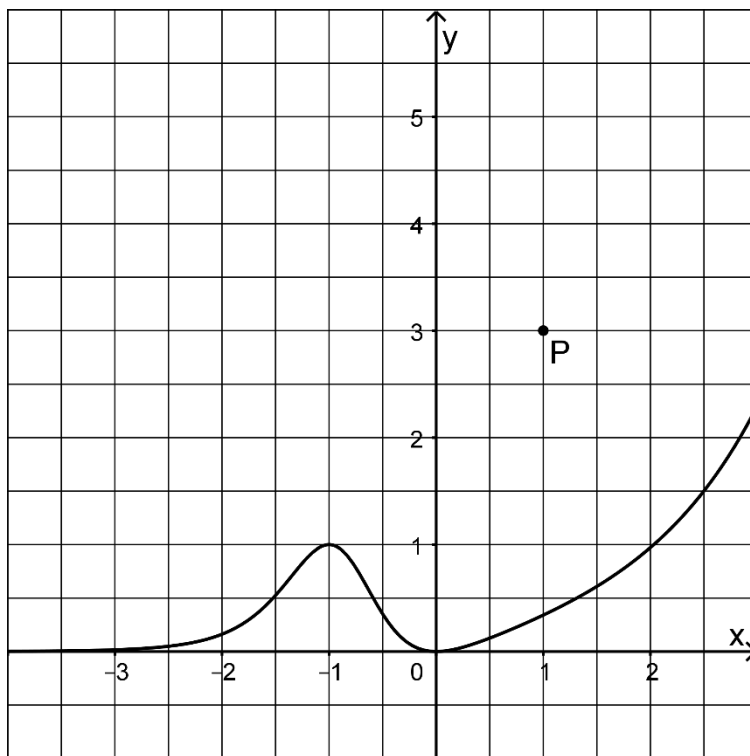


Abb. 2

- 2 a) Geben Sie die Koordinaten des Tiefpunkts des Graphen der in \mathbb{R} definierten Funktion h mit $h(x) = -g(x - 3)$ an.
- 3 b) Der Graph einer Stammfunktion von g verläuft durch P . Skizzieren Sie diesen Graphen in Abbildung 2.

Stochastik

Aufgabengruppe 1

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

- BE*
- Die vier Seiten eines regelmäßigen Tetraeders sind mit den Zahlen 1, 2, 3 und 4 durchnummeriert. Das Tetraeder wird fünfmal geworfen.
- 2 **a)** Geben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem Term $\left(\frac{3}{4}\right)^5$ berechnet werden kann, und begründen Sie Ihre Angabe.
- 3 **b)** Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet werden kann, dass jede Zahl mindestens einmal erzielt wird.

5

Stochastik
Aufgabengruppe 2

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

In einen leeren Behälter werden drei Kugeln gelegt. Dabei wird die Farbe jeder Kugel durch Werfen eines Würfels festgelegt, dessen Seiten mit den Zahlen 1 bis 6 durchnummeriert sind: Wird die „1“ oder die „2“ erzielt, wird eine gelbe Kugel gewählt, sonst eine schwarze.

- 2 a) Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich nun mindestens zwei schwarze Kugeln im Behälter befinden, $\frac{20}{27}$ beträgt.
- 3 b) Aus dem Behälter werden zwei der drei Kugeln zufällig entnommen. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide entnommenen Kugeln schwarz sind.

5

Geometrie
Aufgabengruppe 1

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

Gegeben ist die Gerade $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

2 a) Zeigen Sie, dass g in der Ebene mit der Gleichung $x_1 + x_2 + x_3 = 2$ liegt.

3 b) Gegeben ist außerdem die Schar der Geraden $h_a: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\mu \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$. Weisen Sie nach, dass g und h_a für jeden Wert von a windschief sind.

5

Geometrie
Aufgabengruppe 2

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

Gegeben sind die Punkte $A(3|5|5)$ und $B(1|1|1)$ sowie die Geraden g und h , die sich in B schneiden. Die Gerade g hat den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, die

Gerade h den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- 1 a) Weisen Sie nach, dass A auf g liegt.
- 4 b) Bestimmen Sie die Koordinaten zweier Punkte C und D so, dass C auf h liegt und das Viereck $ABCD$ eine Raute ist.

5

Mathematik

Abiturprüfung 2023

Prüfungsteil B

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen als Hilfsmittel verwendet werden

- die vom Staatsministerium genehmigte Merkhilfe für das Fach Mathematik,
- eine der vom Staatsministerium zugelassenen stochastischen Tabellen,
- eine der vom Staatsministerium für Leistungserhebungen zugelassenen naturwissenschaftlichen Formelsammlungen,
- ein Taschenrechner, der den vom Staatsministerium getroffenen Regelungen entspricht.

Zu den Themengebieten Analysis, Stochastik und Geometrie wählt der Fachausschuss jeweils eine Aufgabengruppe zur Bearbeitung aus. **Die zu einer Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil A bearbeitet werden.**

<hr/> <p>Name des Prüflings</p>

Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist abzugeben.

Analysis

Aufgabengruppe 1

BE

- 1 Gegeben ist die in \mathbb{R} definierte Funktion $f : x \mapsto 2e^{-\frac{1}{8}x^2}$. Abbildung 1 zeigt den Graphen G_f von f , der die x -Achse als waagrechte Asymptote besitzt.

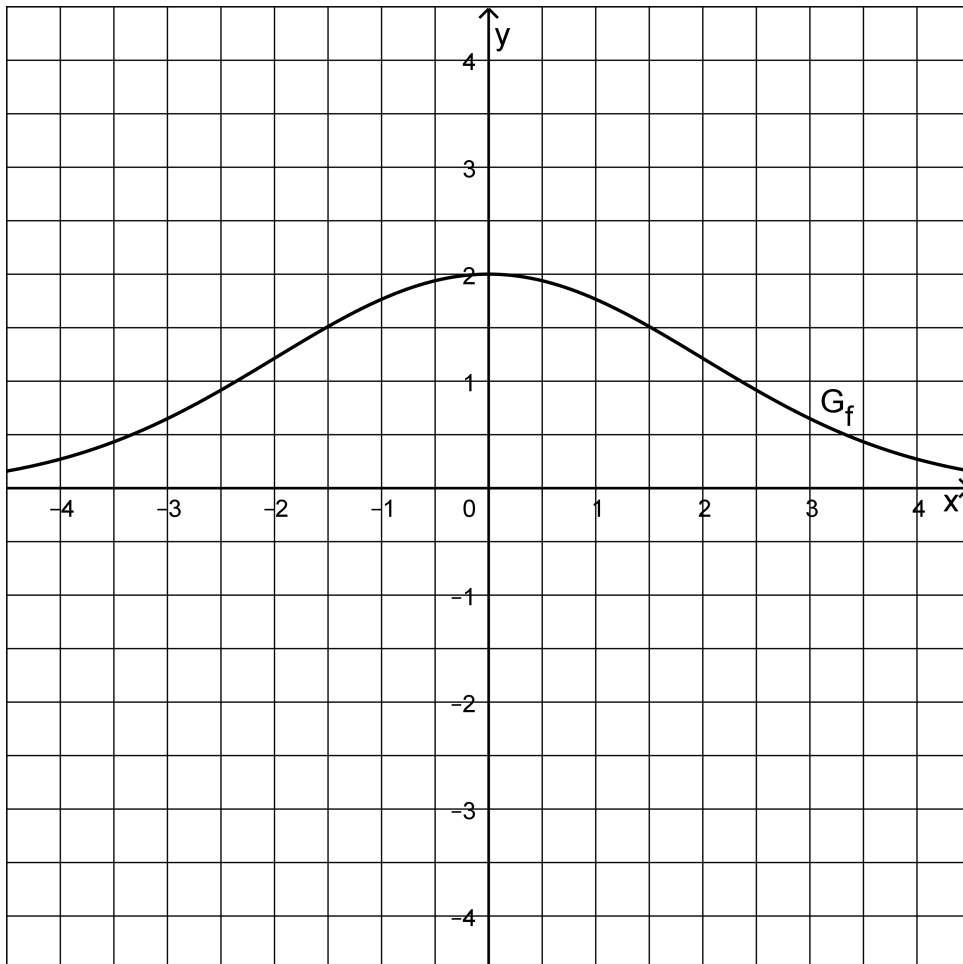


Abb. 1

- 2 a) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts von G_f mit der y -Achse und weisen Sie rechnerisch nach, dass G_f symmetrisch bezüglich der y -Achse ist.
- 5 b) Der Punkt $W\left(-2 \mid 2e^{-\frac{1}{2}}\right)$ ist einer der beiden Wendepunkte von G_f . Die Tangente an G_f im Punkt W wird mit w bezeichnet. Ermitteln Sie eine Gleichung von w und berechnen Sie die Stelle, an der w die x -Achse schneidet.

$$(zur\ Kontrolle: f'(x) = -\frac{1}{2}x \cdot e^{-\frac{1}{8}x^2})$$

Betrachtet wird für jeden Wert $c \in \mathbb{R}^+$ das Rechteck mit den Eckpunkten $P(-c \mid 0)$, $Q(c \mid 0)$, $R(c \mid f(c))$ und S .

- 1 c) Zeichnen Sie für $c = 2$ das Rechteck $PQRS$ in Abbildung 1 ein.

(Fortsetzung nächste Seite)

- 3 d) Berechnen Sie denjenigen Wert von c , für den $\overline{QR} = 1$ gilt.
- 3 e) Geben Sie in Abhängigkeit von c die Seitenlängen des Rechtecks PQRS an und begründen Sie, dass der Flächeninhalt des Rechtecks durch den Term $A(c) = 4c \cdot e^{-\frac{1}{8}c^2}$ gegeben ist.
- 4 f) Es gibt einen Wert von c , für den der Flächeninhalt $A(c)$ des Rechtecks PQRS maximal ist. Berechnen Sie diesen Wert von c .

Betrachtet werden für $k \in \mathbb{R}$ die in $]-\infty; 0]$ definierten Funktionen $f_k : x \mapsto f(x) + k$. Somit gilt $f_0(x) = f(x)$, wobei sich f_0 und f im Definitionsbereich unterscheiden.

- 4 g) Begründen Sie mithilfe der ersten Ableitung von f_k , dass f_k für jeden Wert von k umkehrbar ist. Skizzieren Sie in Abbildung 1 den Graphen der Umkehrfunktion von f_0 .
- 2 h) Geben Sie alle Werte von k an, für die der Graph von f_k und der Graph der Umkehrfunktion von f_k keinen gemeinsamen Punkt haben.

2 Abbildung 2 zeigt ein Haus mit einer Dachgaube, deren Vorderseite schematisch in Abbildung 3 dargestellt ist. Die Vorderseite wird modellhaft durch das Flächenstück beschrieben, das der Graph G_f der Funktion f aus Aufgabe 1, die x -Achse und die Geraden mit den Gleichungen $x = -4$ und $x = 4$ einschließen. Dabei entspricht eine Längeneinheit im Koordinatensystem einem Meter in der Realität.

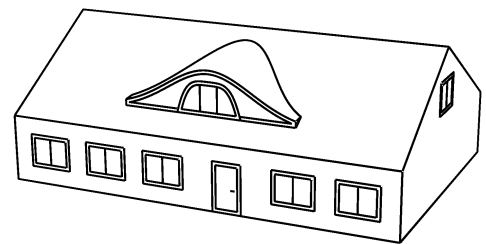


Abb. 2

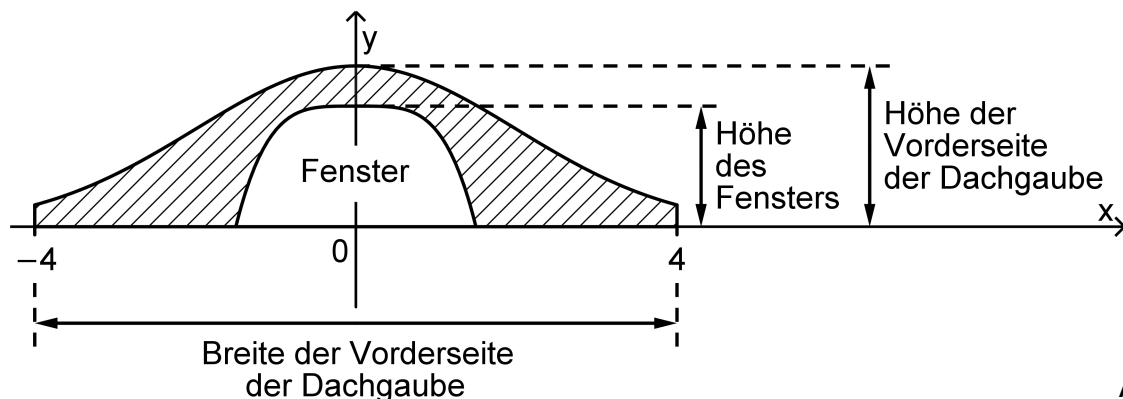


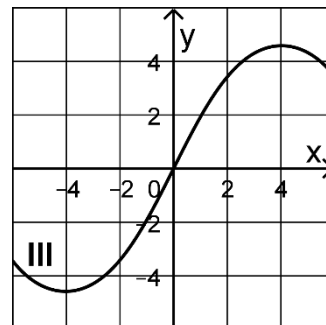
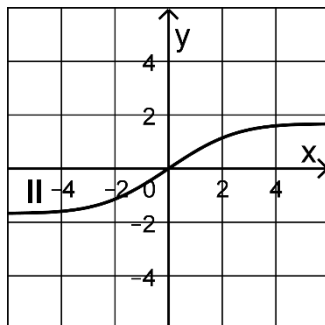
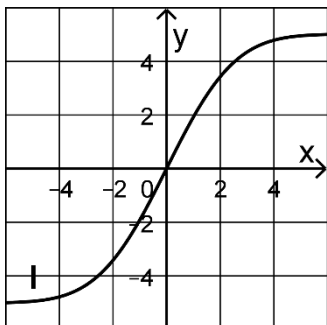
Abb. 3

- 2 a) Geben Sie die Breite und die Höhe der Vorderseite der Dachgaube an. In der Vorderseite der Dachgaube befindet sich ein Fenster. Dem Fenster entspricht im Modell das Flächenstück, das der Graph der Funktion g mit $g(x) = ax^4 + b$ und geeigneten Werten $a, b \in \mathbb{R}$ mit der x -Achse einschließt (vgl. Abbildung 3).
- 2 b) Begründen Sie, dass a negativ und b positiv ist.

(Fortsetzung nächste Seite)

Um den Flächeninhalt der Vorderseite der Dachgaube zu ermitteln, wird eine Stammfunktion F von f betrachtet.

- 2 c) Einer der Graphen I, II und III ist der Graph von F . Begründen Sie, dass dies Graph I ist, indem Sie jeweils einen Grund dafür angeben, dass Graph II und Graph III nicht infrage kommen.



- 5 d) Bestimmen Sie nun mithilfe des Graphen von F aus Aufgabe 2c den Flächeninhalt der gesamten Vorderseite der Dachgaube (einschließlich des Fensters).

Beschreiben Sie unter Einbeziehung dieses Flächeninhalts die wesentlichen Schritte eines Lösungswegs, mit dem der Wert von a rechnerisch so bestimmt werden könnte, dass bei einer Fensterhöhe von 1,50 m der Teil der Vorderseite der Dachgaube, der in Abbildung 3 schraffiert dargestellt ist, den Flächeninhalt 6 m^2 hat.

- 5 e) Um einen Näherungswert für die Länge der oberen Profillinie der Vorderseite der Dachgaube berechnen zu können, wird G_f im Bereich $-4 \leq x \leq 4$ durch vier Kreisbögen angenähert, die nahtlos ineinander übergehen und zueinander kongruent sind. Einer dieser Kreisbögen erstreckt sich im Bereich $0 \leq x \leq 2$ und ist Teil des Kreises mit Mittelpunkt $M(0 | -1)$ und Radius 3. Berechnen Sie den Mittelpunktswinkel des zu diesem Kreisbogen gehörenden Kreissektors und ermitteln Sie damit den gesuchten Näherungswert.

Analysis

Aufgabengruppe 2

BE

1 Auf einer Autobahn entsteht morgens an einer Baustelle häufig ein Stau.

An einem bestimmten Tag entsteht der Stau um 06:00 Uhr und löst sich bis 10:00 Uhr vollständig auf. Für diesen Tag kann die momentane Änderungsrate der Staulänge mithilfe der in \mathbb{R} definierten Funktion f mit

$$f(x) = x \cdot (8 - 5x) \cdot \left(1 - \frac{x}{4}\right)^2 = -\frac{5}{16}x^4 + 3x^3 - 9x^2 + 8x$$

beschrieben werden. Dabei gibt x die nach 06:00 Uhr vergangene Zeit in Stunden und $f(x)$

die momentane Änderungsrate der Staulänge in Kilometern pro Stunde an. Die Abbildung 1 zeigt den Graphen von f für $0 \leq x \leq 4$.

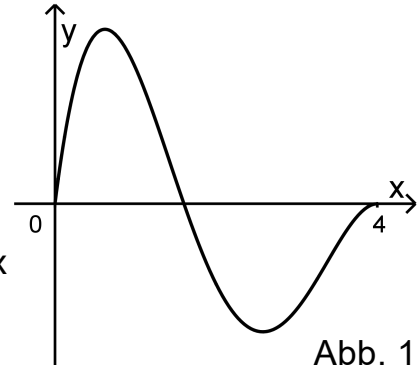


Abb. 1

Für die erste Ableitungsfunktion von f gilt $f'(x) = (5x^2 - 16x + 8) \cdot \left(1 - \frac{x}{4}\right)$.

- 3 a) Nennen Sie die Zeitpunkte, zu denen die momentane Änderungsrate der Staulänge den Wert null hat, und begründen Sie anhand der Struktur des Funktionsterms von f , dass es keine weiteren solchen Zeitpunkte gibt.
- 1 b) Es gilt $f(2) < 0$. Geben Sie die Bedeutung dieser Tatsache im Sachzusammenhang an.
- 5 c) Bestimmen Sie rechnerisch den Zeitpunkt, zu dem die Staulänge am stärksten zunimmt.
- 2 d) Geben Sie den Zeitpunkt an, zu dem der Stau am längsten ist. Begründen Sie Ihre Angabe.

Im Sachzusammenhang ist neben der Funktion f die in \mathbb{R} definierte

Funktion s mit $s(x) = \left(\frac{x}{4}\right)^2 \cdot (4 - x)^3 = -\frac{1}{16}x^5 + \frac{3}{4}x^4 - 3x^3 + 4x^2$ von

Bedeutung.

- 4 e) Begründen Sie, dass die folgende Aussage richtig ist:
Die Staulänge kann für jeden Zeitpunkt von 06:00 Uhr bis 10:00 Uhr durch die Funktion s angegeben werden.
 Bestätigen Sie rechnerisch, dass sich der Stau um 10:00 Uhr vollständig aufgelöst hat.
- 3 f) Berechnen Sie die Zunahme der Staulänge von 06:30 Uhr bis 08:00 Uhr und bestimmen Sie für diesen Zeitraum die mittlere Änderungsrate der Staulänge.

(Fortsetzung nächste Seite)

3

g) Für einen anderen Tag wird die momentane Änderungsrate der Staulänge für den Zeitraum von 06:00 Uhr bis 10:00 Uhr durch den in der Abbildung 2 gezeigten Graphen dargestellt. Dabei ist x die nach 06:00 Uhr vergangene Zeit in Stunden und y die momentane Änderungsrate der Staulänge in Kilometern pro Stunde.

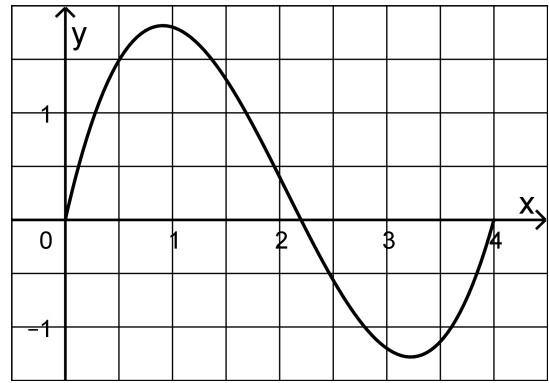


Abb. 2

Um 07:30 Uhr hat der Stau eine bestimmte Länge. Es gibt einen anderen Zeitpunkt, zu dem der Stau die gleiche Länge hat. Markieren Sie diesen Zeitpunkt in der Abbildung 2, begründen Sie Ihre Markierung und veranschaulichen Sie Ihre Begründung in der Abbildung 2.

2 Betrachtet wird die Schar der in \mathbb{R} definierten Funktionen h_k mit

$$h_k(x) = (x-3)^k + 1 \text{ und } k \in \{1; 2; 3; \dots\}.$$

3

a) Geben Sie in Abhängigkeit von k das Verhalten von h_k für $x \rightarrow -\infty$ an und begründen Sie Ihre Angabe.

3

b) Ermitteln Sie die Koordinaten der beiden Punkte, die alle Graphen der Schar gemeinsam haben.

6

c) Die erste Ableitungsfunktion von h_k wird mit h'_k bezeichnet. Beurteilen Sie die folgende Aussage:

Es gibt genau einen Wert von k , für den der Graph von h'_k Tangente an den Graphen von h_k ist.

7

d) Die Graphen von h_k und h'_k werden in der Abbildung 3 für $k = 4$ beispielhaft für gerade Werte von k gezeigt, in der Abbildung 4 für $k = 5$ beispielhaft für ungerade Werte von k .

Für $k \geq 4$ werden die Punkte $P(4 | h_k(4))$, $Q(4 | h'_k(4))$, $R(2 | h_k(2))$ und $S(2 | h'_k(2))$ betrachtet. Diese Punkte sind jeweils Eckpunkte eines Vierecks.

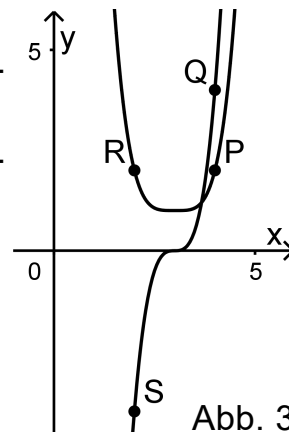


Abb. 3

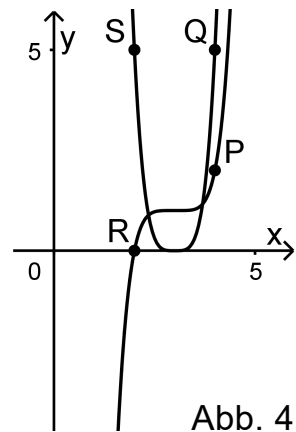


Abb. 4

Begründen Sie, dass jedes dieser Vierecke ein Trapez ist, und zeigen Sie, dass die folgende Aussage richtig ist:

Für jeden geraden Wert von k mit $k \geq 4$ stimmen der Flächeninhalt des Trapezes für k und der Flächeninhalt des Trapezes für $k + 1$ überein.

Stochastik

Aufgabengruppe 1

BE

- 1 Im Dezember 2021 wurden in Norwegen rund 14 000 Pkw neu zugelassen. In einer vereinfachten Übersicht sind die Anteile der verschiedenen Antriebsarten an diesen Neuzulassungen dargestellt:

Pkw mit Elektromotor		Pkw ohne Elektromotor (Verbrenner)		
rein elektrisch	Plug-in-Hybrid	Benzin	Diesel	Sonstige
65 %	25 %	3 %	4 %	3 %

Für eine Untersuchung werden aus diesen Neuzulassungen 200 Fahrzeuge zufällig ausgewählt und deren Besitzer nach den Gründen für die Wahl der Antriebsart befragt. Da aus einer großen Anzahl von Fahrzeugen nur verhältnismäßig wenige ausgewählt werden, wird das Urnenmodell „Ziehen mit Zurücklegen“ verwendet.

- 4 a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
 D: „Unter den ausgewählten Pkw befinden sich sieben oder acht Verbrenner mit Dieselmotor.“
 E: „Unter den ausgewählten Pkw befinden sich mehr als 135 mit rein elektrischem Antrieb.“
- 3 b) Geben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem Term $\sum_{k=0}^{25} \binom{200}{k} \cdot 0,1^k \cdot (1-0,1)^{200-k}$ berechnet werden kann.
- 2 c) Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Pkw mit Elektromotor unter den ausgewählten Fahrzeugen. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung von X.
- 3 d) Für einen bestimmten Wert $n \in \{1;2;3;\dots\}$ werden für $p \in]0;1[$ die binomialverteilten Zufallsgrößen Z_p mit den Parametern n und p betrachtet. Weisen Sie nach, dass unter diesen Zufallsgrößen diejenige mit $p = 0,5$ die größte Varianz hat.
- 3 e) Aus den neu zugelassenen Pkw mit Elektromotor werden 40 Fahrzeuge zufällig ausgewählt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich darunter genau zehn Plug-in-Hybride befinden.

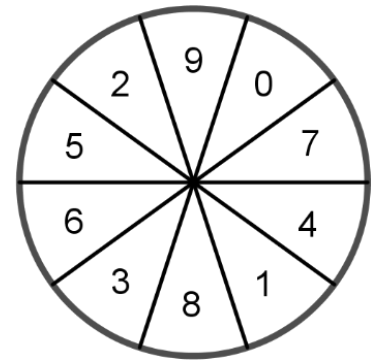
(Fortsetzung nächste Seite)

- 5 **2** In Deutschland waren zu Beginn des Jahres 2021 etwa 320 000 Pkw mit rein elektrischem Antrieb und 280 000 Plug-in-Hybride zugelassen, also insgesamt etwa 600 000 Pkw mit Elektromotor. Der Anteil der Pkw mit Elektromotor am Gesamtbestand aller in Deutschland zugelassenen Pkw betrug rund 1,2 %. Bestimmen Sie die Anzahl der Pkw, die aus diesem Gesamtbestand mindestens zufällig ausgewählt werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 97 % mindestens ein Pkw mit rein elektrischem Antrieb darunter ist.
- 3 Ein Autozulieferer hat zwei Betriebsstandorte A und B. Die Zahl der Beschäftigten am Standort A ist viermal so groß wie am Standort B. 60 % aller Beschäftigten des Autozulieferers haben sich für den Kauf eines Jobtickets entschieden, mit dem die Firma die Nutzung des öffentlichen Personennahverkehrs für den Weg zur Arbeit fördert.
- 2 **a)** Bestimmen Sie unter der Annahme, dass der Anteil der Beschäftigten mit einem Jobticket an beiden Standorten gleich ist, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Beschäftigter des Autozulieferers am Standort B arbeitet und kein Jobticket besitzt.
- 3 **b)** Tatsächlich ist der Anteil der Beschäftigten mit einem Jobticket an beiden Standorten unterschiedlich; am Standort B besitzt nur die Hälfte der Beschäftigten ein Jobticket. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Beschäftigter des Autozulieferers, der ein Jobticket besitzt, am Standort A arbeitet.

Stochastik
Aufgabengruppe 2

BE

Die Sektoren des abgebildeten Glücksrads sind gleich groß und mit den Zahlen von 0 bis 9 durchnummeriert.



- 3 **1** Das Glücksrad wird zwanzigmal gedreht. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A und B.
- A: „Es wird genau siebenmal eine ungerade Zahl erzielt.“
- B: „Es wird mehr als siebenmal und höchstens zwölfmal eine ungerade Zahl erzielt.“
- 5 **2** Das Glücksrad wird zweimal gedreht. Untersuchen Sie, ob die Ereignisse C und D stochastisch unabhängig sind.
- C: „Die Summe der erzielten Zahlen ist kleiner als 4.“
- D: „Das Produkt der erzielten Zahlen ist 2 oder 3.“
- 3** Mit dem Glücksrad wird ein Spiel durchgeführt. Jeder Spieler darf das Glücksrad beliebig oft drehen. Beendet er das Spiel selbst, bevor er eine „0“ erzielt, so wird ihm die Summe der erzielten Zahlen in Euro ausgezahlt. Erzielt er eine „0“, so ist das Spiel dadurch beendet und es erfolgt keine Auszahlung.
- 2 **a)** Ein erster Spieler entscheidet sich vor dem Spiel dafür, das Glücksrad, sofern er keine „0“ erzielt, viermal zu drehen und danach das Spiel zu beenden. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er eine Auszahlung erhält.
- 4 **b)** Bei einem zweiten Spieler beträgt nach mehrmaligem Drehen des Glücksrads die Summe der erzielten Zahlen 60. Er möchte nun das Spiel entweder sofort beenden oder das Glücksrad genau ein weiteres Mal drehen. Berechnen Sie für den Fall, dass sich der Spieler für die weitere Drehung entscheiden sollte, den Erwartungswert für die Auszahlung. Geben Sie eine Empfehlung ab, ob sich der Spieler für das Beenden des Spiels oder für die weitere Drehung entscheiden sollte, und begründen Sie Ihre Empfehlung.

(Fortsetzung nächste Seite)

- 4 c) Wenn sich ein Spieler vor dem Spiel dafür entscheidet, das Glücksrad, sofern er keine „0“ erzielt, n -mal zu drehen, dann kann der Erwartungswert für die Auszahlung mit dem Term $5n \cdot 0,9^n$ berechnet werden. Beurteilen Sie die folgende Aussage:

Es gibt zwei, aber nicht drei aufeinanderfolgende Werte von n , für die die Erwartungswerte für die Auszahlung übereinstimmen.

- 4 Im Folgenden wird ein Glücksrad mit n gleich großen Sektoren, die mit den Zahlen von 0 bis $n - 1$ durchnummeriert sind, betrachtet.

- 3 a) Bestimmen Sie für $n = 5$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei dreimaligem Drehen des Glücksrads genau zwei gleiche Zahlen erzielt werden.

- 4 b) Das Glücksrad wird n -mal gedreht. Ermitteln Sie den kleinstmöglichen Wert von n , für den die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle Zahlen verschieden sind, kleiner als 1% ist.

Geometrie

Aufgabengruppe 1

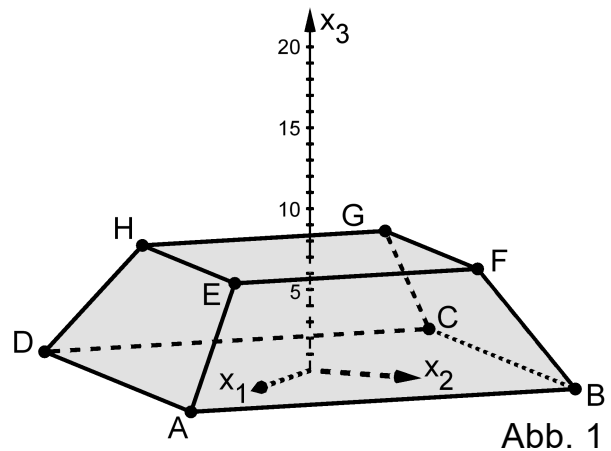
BE

Gegeben sind die Punkte $A(19|0|0)$, $B(0|19|0)$, $E(12|0|7)$ und $F(0|12|7)$ (vgl. Abbildung 1). Das Viereck ABFE liegt in der Ebene L.

- 3 a) Weisen Sie nach, dass das Viereck ABFE ein Trapez mit zwei gleich langen Seiten ist.
- 6 b) Bestimmen Sie eine Gleichung von L in Koordinatenform sowie die Größe φ des Winkels, den L mit der x_1x_2 -Ebene einschließt.

(zur Kontrolle: $x_1 + x_2 + x_3 - 19 = 0$; $\varphi \approx 55^\circ$)

Abbildung 1 zeigt den Körper ABCDEFGH, bei dem die quadratische Grundfläche ABCD parallel zur quadratischen Deckfläche EFGH liegt. Der Körper ist symmetrisch sowohl bezüglich der x_1x_3 -Ebene als auch bezüglich der x_2x_3 -Ebene. Außerdem werden die Punkte $S_k(0|0|k)$ mit $k \in]7; +\infty[$ betrachtet, die Spitzen von Pyramiden EFGHS_k sind.



- 2 c) Bestimmen Sie rechnerisch denjenigen Wert von k, für den die Pyramide EFGHS_k den Körper ABCDEFGH zu einer großen Pyramide ABCDS_k ergänzt.

(zur Kontrolle: $k = 19$)

- 4 d) Zeichnen Sie die Pyramide EFGHS₁₅ in Abbildung 1 ein. Die Seitenfläche EFS₁₅ und die Grundfläche EFGH dieser Pyramide schließen einen Winkel ein. Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass die Größe dieses Winkels kleiner als 45° ist; verwenden Sie dazu folgende Information:

Für den Mittelpunkt M des Quadrats EFGH und den Punkt N mit $\vec{N} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{E} + \vec{F})$ gilt $\overline{MS_{15}} < \overline{MN}$.

Der Körper ABCDEFGHS₁₅ stellt modellhaft die Knickpyramide des Pharaos Snofru dar, die ca. 2650 v. Chr. in Ägypten erbaut wurde (vgl. Abbildung 2). Dabei beschreibt die x_1x_2 -Ebene den horizontalen Boden; eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 7 m in der Realität.



Abb. 2

(Fortsetzung nächste Seite)

Ursprünglich wurde mit dem Bau einer Pyramide begonnen, die im Modell der Pyramide $ABCD S_{19}$ entspricht. Aufgrund von Stabilitätsproblemen im Bauprozess musste die Neigung der Seitenflächen gegenüber dem Boden beim Erreichen einer bestimmten Höhe verändert werden. Der entstandene Knick ist namensgebend für die Pyramide.

- 3 e) Bestimmen Sie die Höhenänderung des Bauwerks, die durch die Bauplanänderung hervorgerufen wurde, in Metern. Begründen Sie, dass im unteren Teil des Bauwerks der Neigungswinkel der Seitenflächen gegenüber dem Boden um mehr als 9° größer ist als im oberen Teil des Bauwerks.

Zu einem bestimmten Zeitpunkt fallen auf die Knickpyramide Sonnenstrahlen, die im Modell durch parallele Geraden mit dem Richtungsvektor $\vec{S}_{15}E$ dargestellt werden. Der Schatten der Spitze der Knickpyramide auf dem horizontalen Boden wird durch den Punkt T beschrieben. Die Lote durch die Punkte E, F, G, H und S_{15} auf die x_1x_2 -Ebene schneiden diese in den Punkten E' , F' , G' , H' bzw. S' . Diese sind zusammen mit der Grundfläche der Pyramide und dem Punkt T in Abbildung 3 dargestellt.

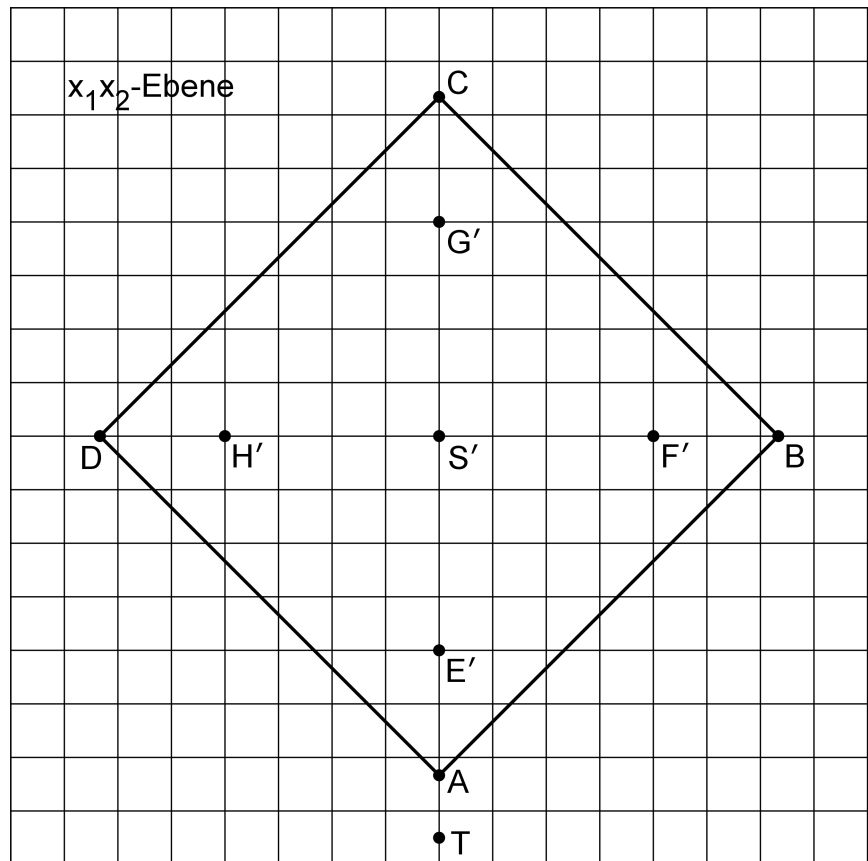


Abb. 3

- 3 f) Berechnen Sie die Koordinaten von T.
- 4 g) Der Schattenbereich der gesamten Pyramide auf dem Boden besteht im Modell aus zwei kongruenten Vierecken. Zeichnen Sie diesen Schattenbereich in Abbildung 3 ein und geben Sie die besondere Form der genannten Vierecke an.

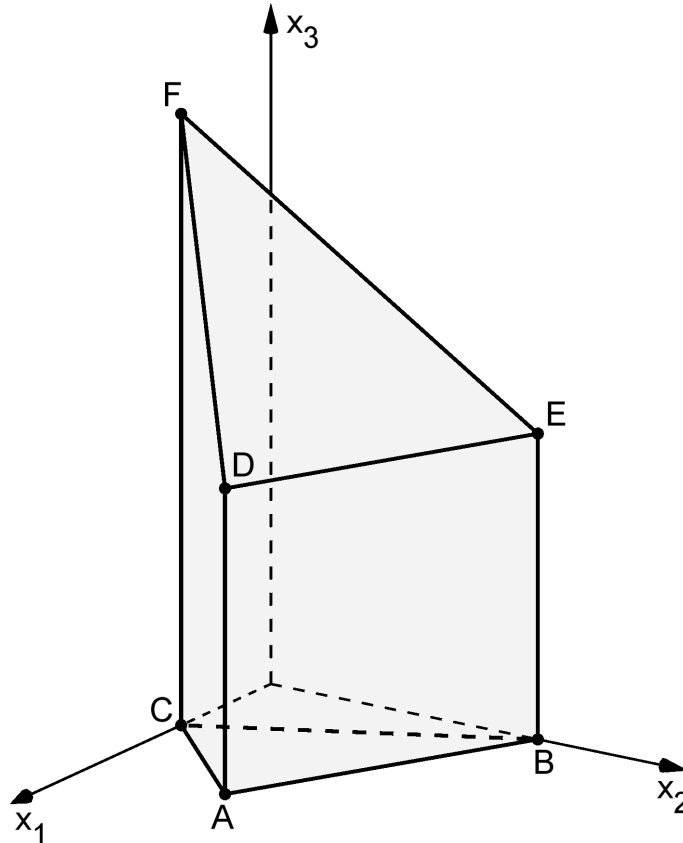
Geometrie

Aufgabengruppe 2

BE

Die Abbildung zeigt den Körper ABCDEF mit $A(6|3|0)$, $B(0|6|0)$, $C(3|0|0)$, $D(6|3|6)$, $E(0|6|6)$ und $F(3|0|12)$.

Die Punkte D, E und F liegen in der Ebene L.



- 4 a) Ermitteln Sie eine Gleichung von L in Koordinatenform.
(zur Kontrolle: $2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 42 = 0$)
- 3 b) Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den L mit der x_1x_2 -Ebene einschließt.
- 3 c) Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC kann mit dem Term $6 \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6$ berechnet werden. Veranschaulichen Sie diese Tatsache durch geeignete Eintragungen in der Abbildung.
- 3 d) Berechnen Sie das Volumen des Körpers ABCDEF.

(Fortsetzung nächste Seite)

- 4 e) Die Ebene N_k enthält die x_3 -Achse und den Punkt $P_k(1-k | k | 0)$ mit $k \in]0;1[$. Welche Kanten des Körpers von N_k geschnitten werden, ist abhängig von k . Durchläuft k alle Werte zwischen 0 und 1, so gibt es Bereiche $]a;b[$, für die jeweils gilt, dass N_k für alle Werte von $k \in]a;b[$ die gleichen Kanten des Körpers schneidet. Bestimmen Sie den größten dieser Bereiche und geben Sie die zugehörigen Kanten an.
- 5 f) Auf der Kante $[AD]$ liegt der Punkt Q , auf der Kante $[BE]$ der Punkt $R(0 | 6 | 2)$. Das Dreieck FQR hat in Q einen rechten Winkel. Bestimmen Sie die x_3 -Koordinate von Q .
- 3 g) Der Körper wird so um die Gerade AB gedreht, dass der mit D bezeichnete Eckpunkt nach der Drehung in der x_1x_2 -Ebene liegt und dabei eine positive x_2 -Koordinate hat. Die folgenden Rechnungen liefern die Lösung einer Aufgabe im Zusammenhang mit der beschriebenen Drehung:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0,8, \text{ d. h. } S(4,8 | 3,6 | 0)$$

$$\bar{T} = \bar{S} + |\overline{CS}| \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Formulieren Sie eine passende Aufgabenstellung und geben Sie die Bedeutung von S an.