Inhaltsverzeichnis

Die Bernoullikette

Die Bernoulli-Kette

Definitionen

Schwarzfahrer: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit bei 10 Kontrollen 2 Schwarzfahrer zu erwischen, wenn jeder 10te Fahrgast ein Schwarzfahrer ist?

Ein Zufallsexperiment mit zwei Ergebnissen heißt „**Bernoulli-Experiment**".

$\Omega = \{0;1\}$ (Niete und Treffer)

P(1) = p (Trefferwahrscheinlichkeit) P(0) = q=1-p (Nietenwahrscheinlichkeit)

Bei den Schwarzfahrern: p = 0,1 = 10% q = 0,9 = 90%

Mehr als eine Kontrolle: Wahrscheinlichkeitsverteilung für X: Anzahl der Treffer

Eine n-malige Hintereinanderausführung eines Bernoulli-Experimentes mit Trefferwahrscheinlichkeit p heißt „**Bernoulli-Kette**" der Länge n.

Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über einer Bernoullikette, bei der X die Anzahl der Treffer repräsentiert nennt man Binomialverteilung.

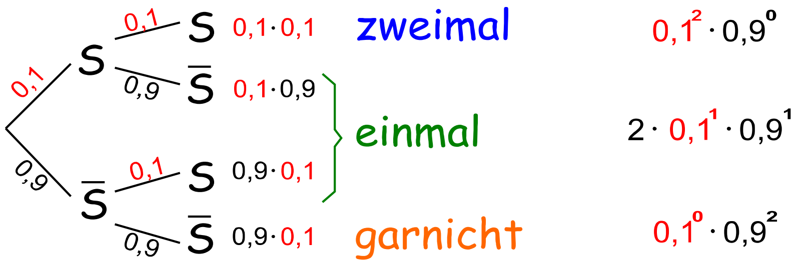
Die **Binomialverteilung** $B(n;p;k) = P_p^n(X=k)$ ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung für das Eintreten von k Treffern in einer Bernoullikette der Länge n bei einer Trefferwahrscheinlichkeit von p.

Einfache Beispiele

a) Bernoullikette der Länge 2

Wahrscheinlichkeit des Erwischens von k Schwarzfahrern bei 2 Kontrollen.

n = 2; B(2;p;k)?

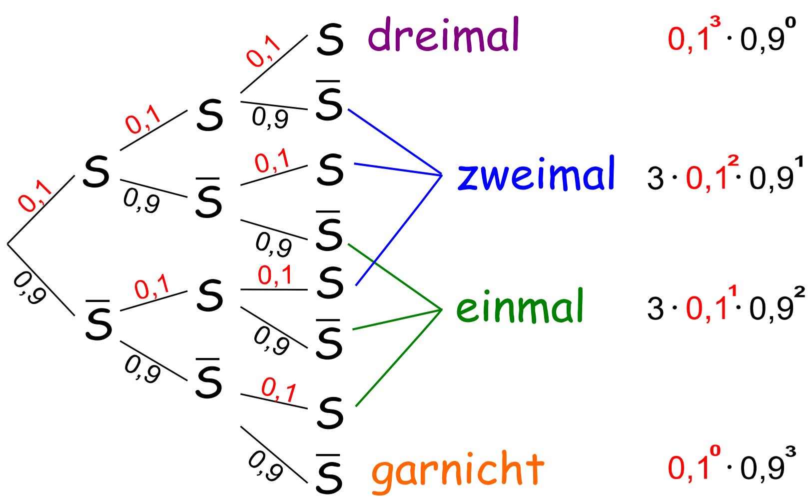


x	0	1	2
Ergebnisse	{00}	{01},{10}	{11}
P(X=x)	$q\cdot q=q^2$	$p\cdot q+q\cdot p=2\cdot p\cdot q$	$p\cdot p=p^2$

b) Bernoullikette der Länge 3

Wahrscheinlichkeit des Erwischens von k Schwarzfahrern bei 3 Kontrollen.

n = 3; B(3;p;k)



x	0	1	2	3
Ergebnisse	{000}	{100},{010},{001}	{011},{101},{110}	{111}
P(X=x)	q^3	$3\,p\,q^2$	$3\,p^2\,q$	p^3

c) Bernoullikette der Länge 4

n = 4; B(4;p;k)?

x	0	1	2	3	4
Ergebnisse	{0000}	{1000},{0100},	{1100},{1010},	{0111},{1011},	{1111}

		{0010},{0001}	…, {0011}	{1101},{1110}	
P(X=x)	q^4	$4\,p\,q^3$	$6\,p^2\,q^2$	$4\,p^3\,q$	q^4

Formel gesucht

a) gesucht: 10 Kontrollen, 2 Schwarzfahrer, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit?

Schreibweise: $B(10\,;0{,}1\,;2)$ oder $P_{0,1}^{10}(X=2)$

b) 2 Schwarzfahrer bei 3 Kontrollen

$P_{0,1}^{3}(X=2)=3\cdot p^2\cdot q=3\cdot 0{,}1^2\cdot 0{,}90=0{,}03$

Wie bekommt man die Anzahl der günstigen Wege?

Wie viele Möglichkeiten hat man für k mal p im Baum „abzubiegen“?

c) 2 Schwarzfahrer bei 5 und bei 10 Kontrollen

$P_{0,1}^{5}(X=2)=\binom{5}{2}\cdot p^2\cdot q^3=0{,}07$

$P_{0,1}^{10}(X=2)=\binom{10}{2}\cdot p^2\cdot q^8=0{,}19$

Formel

Die WS für k Treffer in einer Bernoullikette der Länge n mit Trefferwahrscheinlichkeit p beträgt:

$$P_p^n(X=k)=\binom{n}{k}p^k\cdot q^{(n-k)}$$

in Excel: BINOMVERT(k;n;p;0)

Bernoullikette (Zusammenfassung der wichtigsten Begriffe)

- <u>Bernoulli-Experiment</u>

Zufallsexperiment (ZE) mit nur zwei Versuchsausgängen:
Treffer (T oder 1) mit Wahrscheinlichkeit p
Niete(N oder 0) mit Wahrscheinlichkeit q = 1-p

- <u>Bernoullikette</u>

n-maliges unabhängiges Durchführen eines Bernoulliexperimentes

- <u>Zufallsgröße Trefferzahl (Binomialverteilung)</u>

Wahrscheinlichkeit für k Treffer in einer Bernoullikette (Länge n, Trefferws p)

$$B(n;p;k)=P_p^n(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot q^{n-k}$$

Lösungen zu Aufgaben aus dem Buch

S100/2

a) $B(10;0{,}9;10)=0{,}9^{10}\approx 0{,}349$

b) Die Fahrer 3 bis 10 sind angeschnallt (wegen des Wortes „genau“)
$P(b)=0{,}1\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9^{8}=0{,}01$

c) Wieder $P(c)=0{,}01^{2}\cdot 0{,}9^{8}$

d) {1100000000}, {0110000000}, … , {0000000011} macht neun Möglichkeiten.
$P(d)=9\cdot 0{,}1^{2}\cdot 0{,}9^{8}$

e) $B(10;0{,}9;2)=\binom{10}{2}\cdot 0{,}9^{8}\cdot 0{,}1^{2}$

f) $0{,}9^{4}\cdot\binom{6}{4}0{,}9^{4}\cdot 0{,}1^{2}$

S101/3

a) $P(A)=1\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{2}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{6}$ $P(B)=7\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{2}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{6}$ $P(C)=\binom{8}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{2}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{6}$

b)

S101/4

a) $P_{0,4}^{10}(X=10)=0{,}4^{10}\approx 0.0001$

b) $P_{0,4}^{10}(X=0)=0{,}6^{10}\approx 0{,}0060$

c) $P_{0,4}^{10}(X=2)=\binom{10}{2}\cdot 0{,}4^{2}\cdot 0{,}6^{8}\approx 0{,}1209$

d) $P_{0,4}^{10}(X<3)=B(10;0{,}4;0)+B(10;0{,}4;1)+B(10;0{,}4,2)\approx 0{,}1673$

e) $P_{0,4}^{10}(X\leq 3)\approx 0{,}3823$

f) $P_{0,4}^{10}(X>4)\approx 0{,}3669$

g) $P_{0,4}^{10}(X\geq 1)=1-P_{0,4}^{10}(X=0)\approx 0{,}9940$

h) $P_{0,4}^{10}(2\leq X\leq 8)\approx 0{,}9519$

S101/5

a) $P_{0,9}^{5}(X=5)=\binom{5}{5}0{,}9^{5}\cdot 0{,}1^{0}=0{,}9^{5}=0{,}59$

b) $P_{0,9}^{20}(X=20)=0{,}9^{20}=0{,}12$

c) $P_{0,9}^{5}(X=0)=\binom{5}{0}0{,}9^{0}\cdot 0{,}1^{5}=0{,}00001$

d) $P_{0,9}^{5}(X=3)=\binom{5}{3}0,9^{3}\cdot 0,1^{2}=0,07$

e) $P_{0,9}^{5}(X\geq 4)=\binom{5}{4}0,9^{4}\cdot 0,1^{1}+\binom{5}{5}0,9^{5}=0,92$

f) $P_{0,9}^{5}(X\geq 1)=1-P_{0,9}^{5}(X=0)=1-0,1^{5}\approx 0,99999$

g) $P_{0,9}^{5}(X=0)=0,1^{5}=0,00001$

S102/6

S102/7

a) $P_{0,8}^{12}(X=10)=\binom{12}{10}0,8^{10}\cdot 0,2^{2}=0,2834$

b) $P_{0,8}^{12}(X\geq 10)=P_{0,8}^{12}(X=10)+P_{0,8}^{12}(X=11)+P_{0,8}^{12}(X=12)=0,5583$

c) $$P_{0,8}^{12}(X\leq 10)=P_{0,8}^{12}(X=10)+P_{0,8}^{12}(X<10)=$$
$$P_{0,8}^{12}(X=10)+1-P_{0,8}^{12}(X\geq 10)=0,2834+1-0,5583=0,7251$$

S103/8

a) $B(12;\frac{1}{3};1)=P_{\frac{1}{3}}^{12}(X=1)=\binom{12}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{1}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{11}\approx 0,0463$

b) $P_{\frac{1}{3}}^{12}(X\geq 2)=1-P_{\frac{1}{3}}^{12}(X<2)\approx 1-\binom{12}{0}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{0}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{12}-0,0463=0,9460$

c) $P_{\frac{1}{3}}^{12}(X=4)\approx 0,2384$

S103/9

a) $P(\text{„}\mathit{beide}\text{“})=0,3\cdot 0,4=0,12$

b) $P(\text{„}\mathit{mindestens\ einer}\text{“})=1-P(\text{„}\mathit{keiner}\text{“})=1-0,7\cdot 0,6=1-0,42=0,58$

c) $P_{\frac{1}{8}}^{12}(X\geq 2)=P_{\frac{1}{8}}^{12}(X=0)+P_{\frac{1}{8}}^{12}(X=1)+P_{\frac{1}{8}}^{12}(X=2)\approx 0,4533$

d) $P_{\frac{1}{8}}^{n}(X\geq 1)>0,95$

$$1-P_{\frac{1}{8}}^{n}(X=0)>0,95$$

$$1-0,95>\left(\frac{7}{8}\right)^{n}$$

$$\left(\frac{7}{8}\right)^{n}<0,05$$

$$n \cdot \ln\left(\frac{7}{8}\right) < \ln(0{,}05)$$

$$n > \frac{\ln(0{,}05)}{\ln\left(\frac{7}{8}\right)} \approx 22{,}43$$

f) p = 0,98

$$p^n > 0{,}75$$

$$n \ln(p) > \ln(0{,}75)$$

$n < \dfrac{\ln(0{,}75)}{\ln(0{,}98)} \approx 14{,}24$ 14 Zweibeln dürfen höchstens gepflanzt werden

Die „3-Mindestens-Aufgabe“

Losziehung

Bei einer Losziehung mit sehr vielen Losen beträgt die Trefferwahrscheinlichkeit 10%. Wie viele Lose muss man mindestens ziehen, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 50% mindestens ein Gewinn dabei ist?

Lösung: $n=?\,;\ p=0{,}1\,;$

Als Gleichung könnte man das so schreiben: Die Summe aller WS aller Bernoulliketten mit p=0,1 ab k=1 bis n muss größer 0,5 sein:

$$P_{0,1}^{n}(X\geq 1)\geq 0{,}5$$

So ist das schwer zu rechnen, weil alle Wahrscheinlichkeiten für Trefferzahlen von 1 bis n zu addieren wären:

$$P_{0,1}^{n}(X\geq 1)=P_{0,1}^{n}(X=1)+P_{0,1}^{n}(X=2)+\ldots+P_{0,1}^{n}(X=n)$$

Deshalb nimmt man das Gegenereignis:

$P_{0,1}^{n}(X\geq 1)=1-P_{0,1}^{n}(X=0)$ „*mindestens eines*“ entspricht „*nicht keines*“

also:

$1-P_{0,1}^{n}(X=0)\geq 0{,}5$ | jetzt auf beiden Seiten $-0{,}5+P_{0,1}^{n}(X=0)$

$$P_{0,1}^{n}(X=0)\leq 0{,}5$$

$$\binom{n}{0}p^{0}q^{n}\leq 0{,}5$$

oder: $q^{n}\leq 0{,}5$

Das ist eine Gleichung, die sich durch „logarithmieren“ lösen lässt.

$$\ln(q^{n})\leq\ln(0{,}5)$$

$n\ln(q)\leq\ln(0{,}5)$ ACHTUNG $\ln(q)<0$! Bei Division Zeichen umdrehen

$$n\geq\frac{\ln(0{,}5)}{\ln(q)}=\frac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}9)}=6{,}58$$

Ab 7 gezogenen Losen ist die Wahrscheinlichkeit, mindestens einen Treffer zu erzielen größer als 50%

Fallschirmsprung

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fallschirm versagt, liegt bei 0,001. Das gleiche gilt für den Ersatzfallschirm.

a) Wie groß ist die WS, dass man bei einem Fallschrimsprung zu Tode kommt?

b) Im weiteren Verlauf wird das Versagen von Fallschirm und Ersatzfallschirm als Treffer gewertet.
Wie viele Sprünge muss man **mindestens** machen, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von **mindestens** 10% **mindestens** ein „Treffer" gelandet wird?

Lösung:

a) $p = 0{,}001 \cdot 0{,}001 = 0{,}000001$

b) $p = \frac{1}{1000000}; q = \frac{999999}{1000000}$

$$P^{n}_{0{,}000001}(X \geq 1) \geq 0{,}1$$

$$1 - P^{n}_{0{,}000001}(X = 0) \geq 0{,}1$$

$$P^{n}_{0{,}000001}(X = 0) \leq 0{,}9$$

$$\binom{n}{0} p^{0} q^{n} \leq 0{,}9$$

$$q^{n} \leq 0{,}9 \quad | \ \ln()$$

$$n \ln(q) \leq \ln(0{,}9)$$

$$n = \frac{\ln(0{,}9)}{\ln(0{,}999999)} \approx 105360$$

Man muss also mindestens 105360 Sprünge machen, damit die Wahrscheinlichkeit für mindestens einen freien Fall mindestens 10% beträgt!

Aufgaben aus dem Buch

S102/6

a) $P_p^{10}(X \geq 1) > 0{,}8$

$1 - P_p^{10}(X = 0) > 0{,}8$

$1 - 0{,}8 > P_p^{10}(X = 0)$

$0{,}2 > \binom{10}{0} p^0 \cdot q^{10} = (1-p)^{10}$

$0{,}2^{\frac{1}{10}} > 1 - p$

$p > 1 - 0{,}2^{\frac{1}{10}} = 0{,}1487$

b) $P_{\frac{1}{6}}^{n}(X \geq 1) \geq 0{,}99$

$1 - P_{\frac{1}{6}}^{n}(X = 0) \geq 0{,}99$

$0{,}01 \geq P_{\frac{1}{6}}^{n}(X = 0)$

$0{,}01 \geq \left(\frac{5}{6}\right)^n$

$n \geq \frac{\ln(0{,}01)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)} = 25{,}26$

ab 26 Würfen liegt die Wahrscheinlichkeit über 99%

c) n=? p=0,06;

$P_{0{,}06}^{n}(X \leq 1) > 0{,}99$

$1 - P_{0{,}06}^{n}(X = 0) > 0{,}99$

$1 - 0{,}99 > 1 \cdot 0{,}06^0 \cdot 0{,}94^n$

$0{,}94^n < 0{,}01$

$n \cdot \ln(0{,}94) < \ln(0{,}01)$

$n > \ln \frac{(0{,}01)}{\ln}(0{,}94) \approx 74{,}43$

ab 75 (152) Kontrollen liegt die WS über 99%

d) $p = 0{,}85$

Ansatz: $0{,}85^n < 0{,}1$

$n \ln(0{,}85) < \ln(0{,}1)$

$n > \frac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}85)} \approx 14{,}17$

Ab 15 Kopien liegt die Wahrscheinlichkeit unter 10%.

S104/10

a) $P_{0,75}^{n}(X \geq 1) \geq 0{,}999$

$1 - P_{0,75}^{n}(X = 0) \geq 0{,}999$

$P_{0,75}^{n}(X = 0) \leq 0{,}001$

$0{,}25^{n} \leq 0{,}001$

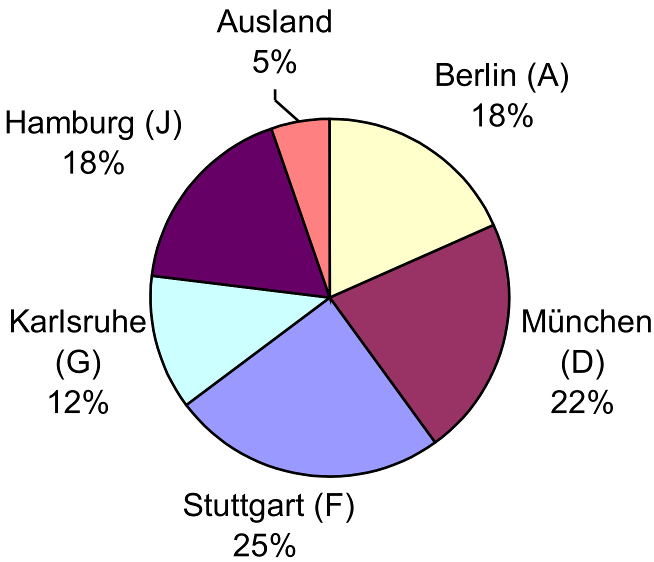
$n \ln(0{,}25) \leq \ln(0{,}001)$

$n \geq \frac{\ln(0{,}001)}{\ln(0{,}25)} = 4.98$

Ab 5 Elfmetern besteht eine 99,9% WS für mindestens einen Treffer.

Abituraufgabe 2004

Euro-Münzen werden in Deutschland an fünf verschiedenen Prägestätten hergestellt. Der Prägeort wird durch einen Kennbuchstaben auf der Münze angegeben (Zuordnung siehe Diagramm).
Für die sich in Deutschland im Umlauf befindenden 2-Euro-Münzen werden unter Einbeziehung ausländischer Münzen folgende Anteile angenommen:



Man geht von einer guten Durchmischung der Euro-Münzen in Deutschland aus.

a) In Deutschland sind 230 Millionen 2-Euro-Münzen mit dem Prägeort Hamburg im Umlauf. Berechnen Sie, wie viele 2-Euro-Münzen insgesamt in Deutschland im Umlauf sind (Rundung auf Millionen). Wie groß ist der Anteil der 2-Euro-Münzen mit Prägeort Berlin unter allen deutschen 2-Euro-Münzen?

b) Brigitte hat fünf 2-Euro-Münzen im Geldbeutel. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind genau drei mit Prägeort München dabei?

c) Beschreiben Sie kurz ein zum Sachzusammenhang passendes Zufallsexperiment und dazu ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit $3!\cdot 0{,}18\cdot 0{,}22\cdot 0{,}12$ beträgt.

d) Dieter sammelt 2-Euro-Münzen. Er untersucht die nächsten 2-Euro-Münzen, die er bekommt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit entdeckt er bei der fünften untersuchten Münze zum zweiten Mal den Kennbuchstaben D?

e) Wie viele 2-Euro-Münzen muss Dieter mindestens untersuchen, damit er mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 98 % wenigstens eine ausländische 2-Euro-Münze findet?

Lösung zur Abituraufgabe 2004

a) Anteil der Münzen aus Hamburg: $18\,\%=0{,}18$

Anzahl Münzen aus Hamburg: $230\cdot 10^6$

Münzen insgesamt: $\dfrac{230\cdot 10^6}{0{,}18}\approx 1278\cdot 10^6=1{,}278\cdot 10^9$

Anteil Berlin: $\dfrac{18}{95}\approx 0{,}19$ also etwa 19%

b) $$B(5\,;\,0{,}22\,;\,3)=\binom{5}{3}\cdot 0{,}22^3\cdot 0{,}78^2=0{,}0647$$

c) Die Wahrscheinlichkeit, dass bei drei aus dem Geldbeutel genommenen Münzen eine aus Berlin, eine aus München und eine aus Karlsruhe stammt.

d) Die fünfte Münze ist festgelegt und muss aus München stammen: WS 22%

$$P(\mathrm{D})=\underbrace{\binom{4}{1}0{,}22^1\cdot 0{,}78^3}_{\text{eine unter den ersten vier}}\cdot \underbrace{0{,}22}_{\text{fünfte Münze}}\approx 0.0919\approx 9{,}2\,\%$$

e) $$P^n_{0,05}(X\ge 1)>0{,}98$$
$$1-P^n_{0,05}(X=0)>0{,}98$$
$$0{,}02>P^n_{0,05}(X=0)$$
$$0{,}02>0{,}95^n$$
$$\ln(0{,}02)>n\ln(0{,}95)$$
$$n>\frac{\ln(0{,}02)}{\ln(0{,}95)}\approx 76{,}26$$

Er muss mindestens 77 Münzen untersuchen.

DER MATHEMATISCHE WEIHNACHTSBAUM

a) Das Pascalsche Dreieck

				1				
			1		1			
		1		2		1		
	1		3		3		1	
1		…						

Die Zahlen der folgenden Zeile berechnen sich aus der Summe der benachbarten Zahlen darüber.

b) Einige Binomialkoeffizienten

$$\binom{0}{0}=1$$

$$\binom{1}{0}=1 \quad \binom{1}{1}=1$$

$$\binom{2}{0}=1 \quad \binom{2}{1}=2 \quad \binom{2}{2}=1$$

$$\binom{3}{0}=1 \quad \binom{3}{1}=3 \quad \binom{3}{2}=3 \quad \binom{3}{3}=0$$

warum?

$$\binom{n}{k} \qquad \binom{n}{k+1}$$

$$\binom{n+1}{k+1}$$

Also muss sein: $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$

Beweis:

$$\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}+\frac{n!}{(k+1)!\cdot(n-k-1)!}$$

benötigt wird ein gleicher Nenner, also links mit (k+1) erweitern und rechts mit (n-k) erweitern:

$$\frac{n!\cdot(k+1)}{(k+1)!\cdot(n-k)!}+\frac{n!\cdot(n-k)}{(k+1)!\cdot(n-k)!}$$

auf einen Bruchstrich schreiben

$$\frac{n!\cdot(k+1)+n!\cdot(n-k)}{(k+1)!\cdot(n-k)!}$$

Den Zähler ausmultiplizieren, den Nenner umschreiben:

$$\frac{n!\cdot k+n!+n!\cdot n-n!\cdot k}{(k+1)!\cdot((n+1)-(k+1))!}$$

Den Zähler zusammenfassen:

$$\frac{n!+n!\cdot n}{(k+1)!\cdot((n+1)-(k+1))!}$$

und n! Ausklammern

$$\frac{n!\cdot(1+n)}{(k+1)!\cdot((n+1)-(k+1))!}=\binom{n+1}{k+1}$$

qed

c) Die allgemeine binomische Formel

$$(a+b)^2=a^2+2\,ab+b^2$$

$$(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)=a^3+2\,a^2b+ab^2+a^2b+2\,a\,b^2+b^3=a^3+3\,a^2b+3\,a\,b^2+b^3$$

$$(a+b)^4=\left[(a+b)^2\right]^2=\left[a^2+2\,ab+b^2\right]^2$$

$= \quad a^4+2\mathrm{a}^3\,b+a^2\,b^2+2\,a^3\,b+4\,a^2\,b^2+2\,a\,b^3+a^2\,b^2+2\,a\,b^3+b^4$

$= \quad a^4+4\,a^3\,b+6\,a^2\,b^2+4\,a\,b^3+b^4$

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\ldots+\binom{n}{n}b^n$$

Die Binomialverteilung

DIE BINOMIALVERTEILUNG

Wiederholung: WS-Verteilungen

Zufallsgröße: **Ergebnis → Zahl**

Wahrscheinlichkeitsverteilung: **Zahl → Wahrscheinlichkeit**

Beispiel Bernoullikette der Länge 2, Trefferwahrscheinlichkeit 10%

Ergebnisse: {00}, {01}, {10}, {11}

Zufallsgröße: **Ergebnis → Anzahl der Treffer k**

{00} → 0

{01}, {10} → 1

{11} → 2

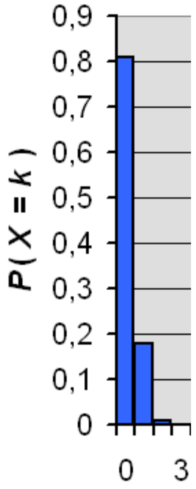
Binomialverteilung: **Anzahl Treffer k → P(X=k)**

(mit p=10%)

0 → 0,81

1 → 0,18

2 → 0,01



oder als Tabelle

k	0	1	2
P(X=k)	0,81	0,18	0,01

Erwartungswert:

$$\mu = 0 \cdot 0{,}81 + 1 \cdot 0{,}18 + 2 \cdot 0{,}01 = 0{,}2$$

Standardabweichung:

$$\sigma = \sqrt{(0-0{,}2)^2 \cdot 0{,}81 + (1-0{,}2)^2 \cdot 0{,}18 + (2-0{,}2)^2 \cdot 0{,}01} = \sqrt{0{,}04 \cdot 0{,}81 + 0{,}64 \cdot 0{,}18 + 3{,}24 \cdot 0{,}01}$$
$$= \sqrt{0{,}0324 + 0{,}1152 + 0{,}0324} = \sqrt{0{,}18} \approx 0{,}4243$$

> Die Binomialverteilung B(n; p) ordnet der Anzahl k der Treffer einer Bernoullikette ihre Wahrscheinlichkeit zu.

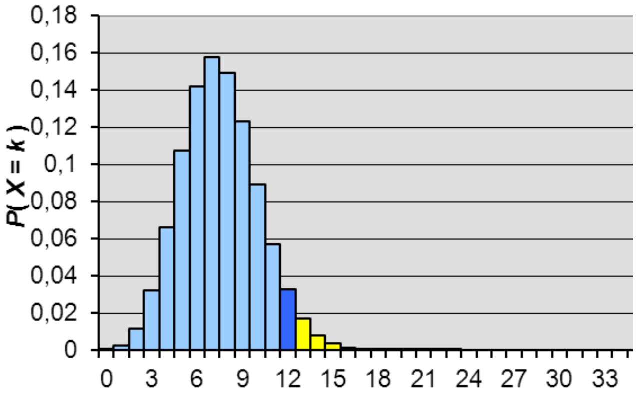
Arbeitsauftrag

Berechnen und zeichnen Sie die Binomialverteilung für

$p = (0{,}1\,;0{,}9)(0{,}25\,;0{,}75)(0{,}4\,;0{,}6)\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)(0{,}5)$ n = 3; 5; 10

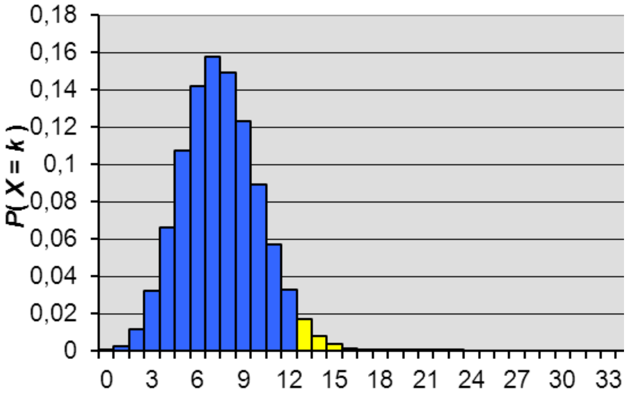
und berechnen Sie den Erwartungswert und Varianz.

Symbole



$B(100\,;0{,}15\,;12) = P_{0{,}15}^{100}(X=12) = 0{,}0838$

Wahrscheinlichkeit für 12 Treffer



$\sum_{0}^{12} B(100\,;0{,}15\,;i) = P_{0{,}15}^{100}(X \leq 12) = 0{,}2473$

kumulierte WS für 0 bis 12 Treffer

Aussagen über Binomialverteilungen

- Summe aller Wahrscheinlichkeiten ist 1
- Maximum liegt etwa bei $n \cdot p$
- B(n; p) ist achsensymmetrisch zu B(n; 1-p)
- $E(X) = n \cdot p$
- $Var(X) = n \cdot p \cdot q$ $\Rightarrow \sigma = \sqrt{npq}$

Verwendung des Tafelwerks

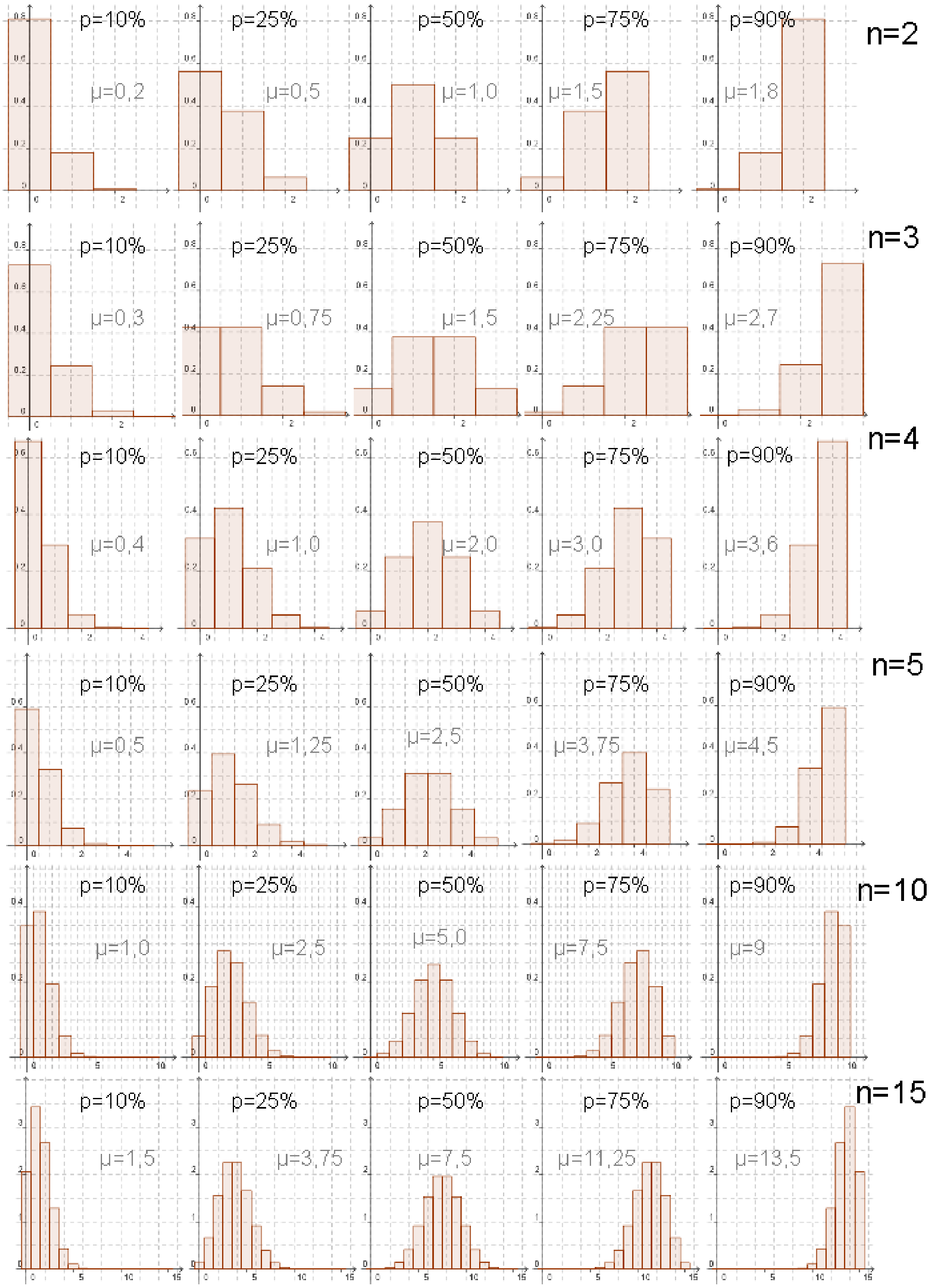
- **S6/S12:** Binomialkoeffizienten besser: nCr Taste auf dem Taschenrechner
- **S9/S16:** B(n;p;k) n nach unten, p nach rechts. Achtung! Wegen der Achsensymmetrie stehen die „Gegenwahrscheinlichkeiten" jeweils rechts und unten.
- **(S29)** $\sum_{0}^{k} B(n\,;p\,;i) = P_p^n(X \leq k)$ kumulierte Wahrscheinlichkeiten
- **Probe1:** Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit bei 100 Kontrollen und einer Schwarzfahrerwahrscheinlichkeit von 10% 5 oder weniger Schwarzfahrer zu erwischen?

  $P_{0{,}1}^{100}(X \leq 5) = 0{,}05758 \approx 5{,}8\,\%$ (Seite 13/45)

- **Probe2:** Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit bei 200 Kontrollen 10 oder mehr Schwarzfahrer zu erwischen?

  $P_{0{,}1}^{200}(X \geq 10) = 1 - P_{0{,}1}^{200}(X \leq 9) = 1 - 0{,}00353 = 0{,}99647 \approx 99{,}6\,\%$ (Seite 14/49)

Übersicht Binomialverteilungen



Kurzfragen:

Zeichnen Sie ein Histogramm für B(2;50%) und berechnen Sie den Erwartungswert.

Was ist eine Binomialverteilung? B(200;50%): wo liegt das Maximum? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit bei 200 Kontrollen bis zu zwölf Schwarzfahrer (10%) zu erwischen? Für welches maximale k gilt: $P_{0,1}^{20}(X \leq k) < 10\,\%$?

Antworten:

$B(2;0,5;0) = 1 \cdot 0,5^2 = 0,25$ $\qquad$ $B(2;0,5;1) = 2 \cdot 0,5^2 = 0,5$

$B(2;0,5;2) = 0,25$

$E(X) = 0 \cdot 0,25 + 1 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,25 = 0,5 + 0,5 = 1$

Ordnet bei einer Bernoullikette der Länge n jeder Trefferanzahl ihre Wahrscheinlichkeit zu.
Das Maximum liegt bei $n \cdot p = 200 \cdot 50 = 100$. $P_{0,1}^{200}(X \leq 12) = 0,0320 \approx 3,2\,\%$
Für k = 14: $P_{0,1}^{200}(X \leq 14) = 0,0929 \approx 9,3\%$.
für k = 15 gilt bereits: $P_{0,1}^{200}(X \leq 15) = 0,1431 \approx 14,3\,\%$.

Aufgaben aus dem Buch

S108/5

a) 0,0520	b) 0,0520	c) 0,2874	d) 0,0213
e) c-d=0,2661	f) 0,9223	g) 0,0953	h) 0,8644
i) 0,7691	k) 0,2309	l) 0,1356	m) 0,0953
n) 0,2309	o) ≈ 1	p) 0,7294	q) 0,8654

S110/10

a) $E(X)=n\cdot p=\frac{20\cdot 1}{3}=\frac{20}{3}=6,\overline{6}\approx 7$

$B(20;\frac{1}{3};7)=0,18213\approx 18,2\%$

b) $P_{\frac{1}{3}}^{20}(4<X<10)=P_{\frac{1}{3}}^{20}(X\leq 9)-P_{\frac{1}{3}}^{20}(X\leq 4)=0,9081-0,1515=0,7566$

c) $P_{\frac{1}{3}}^{20}(X\geq 10)=1-P_{\frac{1}{3}}^{20}(X\leq 9)=1-0,9081=0,0919$

d) $P_{0,25}^{20}(X\leq 9)=0,98614$ ✗ $P_{0,2}^{20}(X\leq 9)=0,99741$ ✓

e) Auf 13 Fragen. Dann gilt $P_{\frac{1}{3}}^{20}(X\geq 13)=1-P_{\frac{1}{3}}^{20}(X\leq 12)=1-99,628<0,01$

S110/11

a) $E(X)=50\cdot 0,8=40$ $B(50;0,8;40)=0,1399\approx 14\%$
$P_{0,8}^{50}(X\geq 40)=1-P_{0,8}^{50}(X\leq 39)=1-0,4164=0,5836$

b) $B(30;0,8;25)=0,1723\approx 17\%$ $B(20;0,8;15)=0,1746\approx 17\%$

$P(b)=0,17\cdot 0,17=0,0289\approx 2,9\%$

c) $B(45;0,8;40)=0,0520$

d) $p=0,8^5=0,32768\approx 32,8\%$
$P_{0,328}^{n}(X\geq 1)\geq 0,99$
$1-P_{0,328}^{n}(X=0)\geq 0,99$
$1-0,99\geq P_{0,328}^{n}(X=0)$
$0,01\geq 0,672^n$
$n\geq\frac{\ln(0,01)}{\ln(0,672)}\approx 11,6$
Es müssen mindestens 12 Chorproben stattfinden.

e) Mitglieder nehmen sich gegenseitig mit dem Auto mit. (also nicht unabhängig voneinander)
Nicht jeder kommt mit einer Wahrscheinlichkeit von 80%, da das Fehlen die unterschiedlichsten Gründe haben kann.

S110/12

	mit Zurücklegen	ohne Zurücklegen
P(A)	$\left(\frac{5}{9}\right)^4$	$\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}$
P(B)	$\left(\frac{4}{9}\right)^4$	$\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6}$
P(C)	$\binom{4}{2}\cdot\left(\frac{5}{9}\right)^2\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^2$	Baum durchrechnen: all Wege mit zweimal schwarz addieren

S111/13

a) mit Zurücklegen: Bernoulli-Kette der Länge 3 $p=0{,}4^3=0{,}064$

ohne Zurücklegen: $\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{30}=0{,}0\overline{3}$ nicht einmal halb so groß

b) Für jedes beliebige N bleibt die WS beim Zurücklegen gleich.

Ohne Zurücklegen, N=100: $\frac{40}{100}\cdot\frac{39}{100}\cdot\frac{38}{100}=0{,}4\cdot 0{,}39\cdot 0{,}38\approx 0{,}5928$

Ohne Zurücklegen, N=1000: $\frac{400}{1000}\cdot\frac{399}{1000}\cdot\frac{398}{1000}\approx 0{,}6352$

Je größer N, desto mehr nähert sich das Ergebnis ohne Zurücklegen dem Ergebnis mit Zurücklegen an, da das Wegnehmen einer Kugel in Bezug zur Gesamtzahl weniger Einfluss hat.

S111/15

a) Die 15% verteilen sich auf zwei Teile; das entspricht 7,5% für den gesamten Laden

b) $P^n_{0{,}075}(X\geq 1)=1-P^n_{0{,}075}(X=0)\geq 0{,}9$

$P^n_{0{,}075}(X=0)\leq 0{,}1$, also $\binom{n}{0}p^0q^n\leq 0{,}1$

$0{,}925^n\leq 0{,}1$

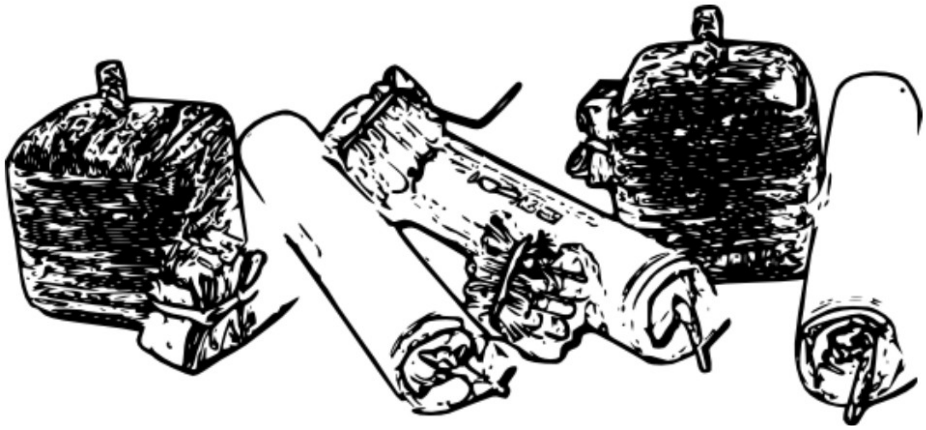
$n\ln(0{,}925)\leq\ln(0{,}1)$

$n\geq\frac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}925)}=29{,}53$

Ab der 30. CD ist mit mindestens 90% Wahrscheinlichkeit eine Raubkopie dabei.

Der Signifikanztest

TESTLOGIK



Typische Situation

Ein Discounter hat bei einem neuen Lieferanten 100 000 Knallkörper bestellt.

Der Lieferant garantiert folgende Qualität: Es sind höchstens 4000 der 100 000 Knallkörper defekt (also 4%).

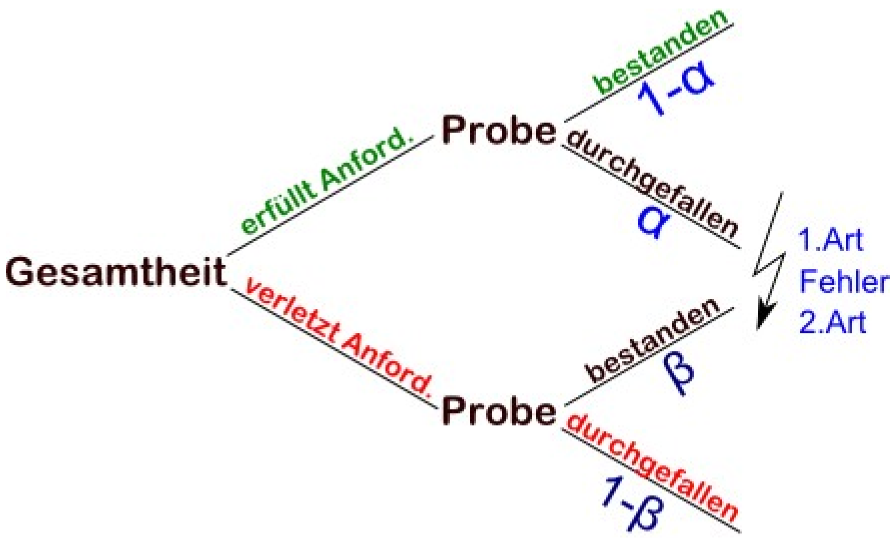
Ein Test aller Knallkörper kommt nicht in Frage (Gründe?).

Risiken des Verfahrens

Die Untersuchung mittels Stichprobe liefert keine sichere Aussage über die Gesamtheit. Deshalb wird das entsprechende Risiko vom Discounter kalkuliert:

Mit welcher Wahrscheinlichkeit

- ist die Sendung in Ordnung und wird abgelehnt? (α: Fehler 1. Art)
- ist die Sendung mangelhaft, wird aber akzeptiert? (β: Fehler 2. Art)



Entscheidungsregel

Die Herstellerangabe wird bei <u>13 oder mehr</u> defekten Knallkörpern verworfen.
Annahmebereich $A=\{0..12\}$ Ablehnungsbereich $\overline{A}=\{13..\}200$

Wie groß ist der Fehler 1. Art α (WS dass Hypothese stimmt und trotzdem verworfen wird)?

Berechnung von Fehlerwahrscheinlichkeiten

Stichprobenlänge n = 200;

bei 100000 Knallkörpern insgesamt: Ziehen ohne Zurücklegen ≈ Ziehen mit Zurücklegen

=> Stichprobe ≈ Bernoullikette der Länge n

a) Fehler 1. Art

Stichprobenlänge

$$P_{0,04}^{200}(X \geq 13)$$

Nullhypothesen-ws. Ablehnungsbereich

$$P_{0,04}^{200}(X \geq 13) = 1 - P_{0,04}^{200}(X \leq 12) \approx 1 - 0{,}9401 = 0{,}0599$$

b) Fehler 2. Art

Dafür muss die tatsächliche WS defekter Knallkörper bekannt sein, beispielsweise 10%

Ansatz:

$$P_{0,1}^{200}(X \leq 12) \approx 0{,}0320$$

Zusammenfassung

Vorgehensweise

Gesamtheit → Stichprobe → Annahmebereich erfüllt → annehmen, sonst ablehnen

Risikoabschätzung

Fehler 1. Art: Gesamtheit √ Stichprobe im Ablehnungsbereich

Fehler 2. Art: Gesamtheit - Stichprobe im Annahmebereich

- Der Discounter behauptet, dass höchstens 4% der Knallkörper defekt sind (**Nullhypothese** $H_0: p \leq 0{,}04$).
- Zur Überprüfung wird eine **Stichprobe** der Länge n durchgeführt.
- Als Zufallsgröße X wird dabei die Anzahl der Treffer definiert.
- X liegt entweder im **Annahmebereich** A oder im Ablehnungsbereich $\overline{A}$. **(Entscheidungsregel)**
- **Nullhypothese** wird **irrtümlich abgelehnt**: **Fehler 1. Art, WS α**. (Nachteil Lieferant)
- **Falsche Nullhypothese** wird **irrtümlich akzeptiert**: **Fehler 2. Art, WS β**. (Nachteil Discounter)
- Ziel ist es, die Wahrscheinlichkeiten der Fehler zu berechnen um ein vernünftiges Testsystem zu erhalten.
- Diese Vorgehensweise insgesamt wird als **Signifikanztest** bezeichnet, die WS **α** für den Fehler 1. Art als **Signifikanzniveau**.

SIGNIFIKANZTESTS

Alle wichtigen Begriffe auf einen Blick

Signifikanztest:

- **Entscheidungsverfahren** zur Überprüfung einer Nullhypothese H_0
- **X**: Absolute Häufigkeit eines Merkmals in eine Stichprobe der Länge **n**

- **Annahmebereich** A : Intervall für die Werte von X, die zur Annahme von H_0 führen
- **Ablehnungsbereich** $\bar{A}$: – " – , die zur Ablehnung – " –

- **Entscheidungsregel**: $X \in A \Rightarrow H_0$ akzeptiert $X \in \bar{A} \Rightarrow H_0$ verworfen

- Fehler **1. Art**: H_0 gilt, wird aber verworfen.
- Fehler **2. Art**: H_0 falsch, wird aber akzeptiert.

Veränderung

- der **Entscheidungsregel**: Fehler 1. Art lässt sich nur auf Kosten des Fehlers 2 Art verringern und umgekehrt
- der **Stichprobenlänge**: Vergrößerung führt zur Verkleinerung aller Fehler.

Signifikanzniveau

- **Höchstwert**, den die WS des Fehlers **1. Art** nicht überschreiten darf

Kurzaufgabe 1:

Knallkörper sollen maximal 15% Ausschuss haben. Stichprobe: Länge 30;
Annahme der Lieferung, wenn höchstens 5 versagen.

- Wie groß ist das Risiko für den Verkäufer?
- Wie groß ist das Risiko für den Käufer, wenn tatsächlich 20% Ausschussware enthalten ist?
- Welche Grenze braucht man für ein Signifikanzniveau von 5%?

Antworten:

- Fehler 1. Art: $P_{0,15}^{30}(X \geq 6) = 0,2894$
- Fehler 2. Art: $P_{0,2}^{30}(X \leq 5) = 0,4275$
- Probieren: $P_{0,15}^{30}(X \geq 7) = 0,1526$ $P_{0,15}^{30}(X \geq 8) = 0,0698$ $P_{0,15}^{30}(X \geq 9) = 0,0278$
  Annahme, wenn zwischen 0 und 8 Knallkörper versagen.

Kurzaufgabe 2:

Herr Rothhardt vermutet, dass mehr als 70% aller Kollegiaten regelmäßig ihre Hausaufgaben in Mathematik machen. Um diese Hypothese zu testen führt er unter den 21 Anwesenden eine Befragung durch. Wie muss die Entscheidungsregel lauten, damit der Fehler 1. Art unter 5% liegt?

Antworten:

$H_0: p \geq 70\%$ also Entscheidungsregel: $\overline{A} = \{0..\mathrm{k}\}; A = \{k+1..21\}$

Fehler 1. Art in diesem Fall: Anzahl der fehlenden HA liegt im Bereich bis k,

Einfache Aufgaben dazu

1.

Kumulierte Binomialverteilung:

a. Bestimme $P_{0,3}^{100}(X \le 25)$ b. Wie groß ist $P_{0,2}^{100}(X \ge 26)$?

2.

Die MVV-Gesellschaft geht davon aus, dass maximal 20% aller Fahrgäste schwarz fahren (Nullhypothese p=20%). Sollte das nicht der Fall sein, will sie 15 weitere Kontrolleure einstellen. Um das herauszufinden wird eine Kontrolle bei 100 Fahrgästen durchgeführt.

a. Wie viele Schwarzfahrer sind bei gültiger Nullhypothese zu erwarten?
b. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler erster Art, wenn der Annahmebereich für die Nullhypothese A={0...25} ist.
c. Nachdem die Zahl der Kontrollen in den letzten Wochen gering war, liegt der tatsächliche Anteil der Schwarzfahrer bei 30%. Berechne die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art.
d. Welche Zahlen muss der Annahmebereich enthalten, damit der Fehler 2. Art unter 5% bleibt?

1.

Kumulierte Binomialverteilung:

a. Bestimme $P_{0,3}^{200}(X \le 50)$ b. Wie groß ist $P_{0,2}^{200}(X \ge 51)$?

2.

Die MVV-Gesellschaft geht davon aus, dass maximal 20% aller Fahrgäste schwarz fahren (Nullhypothese p=20%). Sollte das nicht der Fall sein, will sie 20 weitere Kontrolleure einstellen. Um das herauszufinden wird eine Kontrolle bei 200 Fahrgästen durchgeführt.

a. Wie viele Schwarzfahrer sind bei gültiger Nullhypothese zu erwarten?
b. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler erster Art, wenn der Annahmebereich für die Nullhypothese A={0...50} ist.
c. Nachdem die Zahl der Kontrollen in den letzten Wochen gering war, liegt der tatsächliche Anteil der Schwarzfahrer bei 30%. Berechne die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art.
d. Welche Zahlen muss der Annahmebereich enthalten, damit der Fehler 2. Art unter 5% bleibt?

Viel Erfolg! Roro

Lösung

1.

$P_{0,3}^{200}(X \leq 50) = 0{,}06955$ $P_{0,2}^{200}(X \geq 51) = 1 - P_{0,2}^{200}(X \leq 50) = 1 - 0{,}96550 = 0{,}03450$

$P_{0,3}^{100}(X \leq 25) = 0{,}16313$ $P_{0,2}^{100}(X \geq 26) = 1 - P_{0,2}^{100}(X \leq 25) = 1 - 0{,}91252 = 0{,}08748$

2.

a. $E(X) = n \cdot p = 200 \cdot 0{,}2 = 40$ $n \cdot p = 0{,}2 \cdot 100 = 20$

b. $P_{0,2}^{200}(X \geq 51) = 0{,}03450$ $P_{0,2}^{100}(X \geq 26) = 0{,}08748$

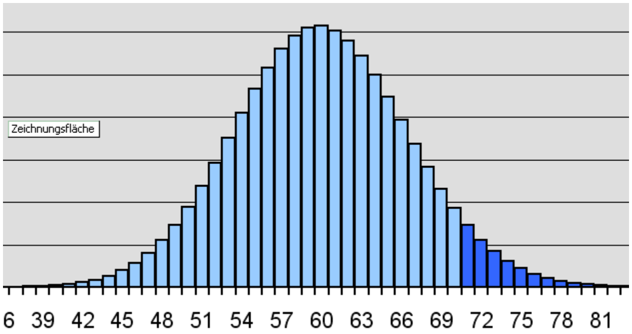
c. $P_{0,3}^{200}(X \leq 50) = 0{,}06955$ $P_{0,3}^{100}(X \leq 25) = 0{,}16313$

d. $A = \{0..48\}$ $A = \{0..22\}$

Abituraufgaben Signifikanztest

1. Der Hersteller von BioFrucht hält eine Werbekampagne für unnötig, weil er vermutet, dass der Bekanntheitsgrad p seiner Limonade mindestens 40 % beträgt. Um dies zu überprüfen, werden 200 zufällig ausgewählte Personen befragt. Der Hersteller will von seiner Vermutung $p \geq 0{,}4$ abrücken und eine Werbekampagne mit kostenlosen Getränkeproben starten, wenn bei der Umfrage weniger als 70 Personen angeben, BioFrucht zu kennen.
   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass keine Getränkeproben verteilt werden, obwohl der Bekanntheitsgrad von BioFrucht tatsächlich nur 30 % beträgt?
2. Es wird angezweifelt, dass der Anteil der Befürworter des Rauchverbots derzeit noch 67 % beträgt. Vielmehr wird vermutet, dass der Prozentsatz gegenwärtig höchstens bei 60 % liegt. Um diese Vermutung zu testen, wird eine Befragung von 100 zufällig ausgewählten Personen durchgeführt.
   Wie muss die Entscheidungsregel mit einem möglichst großen Ablehnungsbereich lauten, wenn die Vermutung mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 5 % irrtümlich abgelehnt werden soll?
3. Der Produzent will eine Fortsetzung der Fernsehshow nur dann finanzieren, wenn mehr als 75 % der „Insel-Camp“-Zuschauer dies befürworten. Die Entscheidung für oder gegen eine Fortsetzung soll mit Hilfe einer Umfrage unter 200 zufällig ausgewählten Zuschauern dieser Sendung gefällt werden. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Sendung irrtümlich fortgesetzt wird, soll höchstens 5 % betragen. Geben Sie die zugehörige Entscheidungsregel an, bei der zugleich die Wahrscheinlichkeit für ein irrtümliches Absetzen möglichst klein ist.
4. Das Unternehmen „Müsli-4-U“ möchte bei seinen Produkten den Geschmack von Jugendlichen stärker berücksichtigen. Es vermutet, dass mindestens 50 % der Jugendlichen ein Müsli ohne Nusszusatz bevorzugen. Um diese Vermutung zu testen, werden 100 zufällig ausgewählte Jugendliche befragt. Wie muss die Entscheidungsregel mit einem möglichst großen Ablehnungsbereich lauten, wenn die Vermutung des Unternehmens mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 10 % irrtümlicherweise verworfen werden soll?
5. „Alkohol auf der Piste“ erhöht bekanntlich das Verletzungsrisiko. Nach einer groß angelegten Aufklärungskampagne vermutet die ortsansässige Bergwacht, dass im Skigebiet der Anteil p aller Erwachsenen, die auf Alkoholkonsum beim Wintersport verzichten, mindestens 80 % beträgt.
   Die Bergwacht will die Nullhypothese $H_0{:}p \geq 0{,}8$ auf dem Signifikanzniveau 5% testen. Dazu wird bei 200 zufällig ausgewählten erwachsenen Wintersportlern ein Alkoholtest durchgeführt. Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel mit einem möglichst großen Ablehnungsbereich.

Lösungen Abituraufgaben Signifikanztests



1. Es handelt sich um Fehler β: Nullhypothese ($p \geq 0{,}4$) wird akzeptiert, obwohl Alternativhypothese ($p = 0{,}3$) gilt. Gesucht ist also folgender Wert:
   $P_{0,3}^{200}(X \geq 70) = 0{,}0542$
2. Die (richtige) Vermutung (=Nullhypothese, $p \leq 0{,}6$) wird irrtümlich abgelehnt: Fehler α.
   $P_{0,6}^{100}(X \geq k) < 0{,}05$
   Suche nach den richtigen WS:
   $P_{0,6}^{100}(X \leq 69) = 0{,}0398$ $P_{0,6}^{100}(X \leq 68) = 0{,}0615$

   Wenn 69 oder mehr Befürworter des Rauchverbots „gemessen" werden, dann wird die Hypothese mit einer WS<5% irrtümlicherweise abgelehnt.
3. Nullhypothese: Mehr als 75% befürworten das Inselcamp. $p > 0{,}75$
   Alternativhypothese: $p \leq 0{,}75$ oder $p = 0{,}75$
   Nullhypothese wird irrtümlich akzeptiert: Fehler β.
   $P_{0,75}^{200}(X \geq k) < 0{,}05$
   Suche nach den richtigen WS:
   $P_{0,75}^{200}(X \geq 162) = 0{,}0276$ $P_{0,75}^{200}(X \geq 161) = 0{,}0405$ $P_{0,75}^{200}(X \geq 160) = 0{,}0578$

   Wenn 161 oder mehr Befragte das Inselcamp befürworten, dann wird die Sendung mit einer WS von unter 5% fortgesetzt, obwohl 75% oder weniger sie befürworten.
4. Nullhypothese $p \geq 50$ wird irrtümlicherweise verworfen: Fehler α
   $P_{0,5}^{100}(X \leq k) < 0{,}1$
   Suche nach der richtigen WS:
   $P_{0,5}^{100}(X \leq 42) = 0{,}0666$ $P_{0,5}^{100}(X \leq 43) = 0{,}0967$ $P_{0,5}^{100}(X \leq 44) = 0{,}1356$

   Wenn 43 oder weniger Befragte ein Müsli ohne Nusszusatz bevorzugen, dann wird die Hypothese $p \geq 0{,}5$ mit einer WS unter 10% abgelehnt, obwohl sie richtig ist.
5. Test auf einem Signifikanzniveau von 5%: Fehler 1. Art soll unter 5% bleiben:

   Tatsächlich verzichten 80% der mehr, in der Probe wurden aber k oder weniger „Verzichter" gemessen: $P_{0,8}^{200}(X \leq k) < 0{,}05$

   Suche nach der richtigen WS:
   $P_{0,8}^{200}(X \leq 150) = 0{,}0494$ $P_{0,8}^{200}(X \leq 151) = 0{,}0690$

   Wenn 150 oder weniger den Alkoholtest bestehen, dann wird die Hypothese auf einem Signifikanzniveau von 5% irrtümlich verworfen.

Lösungen zu Aufgaben aus dem Buch

S118/1

a) Nullhypothese: $H_0: p=0{,}5$
Annahmebereich: $A=\{0\,..\,6\}$
Ablehnungsbereich: $\overline{A}=\{7\,..\,10\}$

b) $P_{0,2}^{10}(X\geq 7)=1-P_{0,2}^{10}(X\leq 6)=0{,}0009\approx 0{,}09\,\%$

c) $P_{0,7}^{10}(X\leq 6)=0{,}3504$

S118/2

a) $H_0: p=0{,}2$
Fehler 1. Art: Kandidat kann nicht hellsehen, der Test sagt aber das Gegenteil
Fehler 2. Art: Kandidat kann hellsehen, versagt aber im Test

b) $P_{0,2}^{20}(X\geq 7)=0{,}0867$ = 8,7%

c) $P_{0,3}^{20}(X<7)=0{,}6080$ $P_{0,5}^{20}(X<7)=0{,}0577$
Der Test ist offenbar so angelegt, dass ein Nicht-Hellseher mit einem geringen Risiko fälschlicherweise als Hellseher identifiziert wird. Denn das Risiko einen „Leicht-Hellseher“ als Nicht-Hellseher zu identifizieren ist sehr hoch (61%).

d) $P_{0,2}^{20}(X\geq 8)=0{,}0321$ (Fehler 1. Art)
$P_{0,3}^{20}(X<8)=0{,}7723$ $P_{0,5}^{20}(X<8)=0{,}1316$ (Fehler 2. Art)
Der Fehler 1. Art wird kleiner, der Fehler 2. Art wird größer!

e) $P_{0,2}^{50}(X\geq 16)=0{,}0308$
$P_{0,3}^{50}(X<16)=0{,}5692$ $P_{0,5}^{50}(X<16)=0{,}0033$
Alle Fehlerwahrscheinlichkeiten haben sich verbessert.

S118/3

$H_0: p=0{,}25$

a) $P_{0,25}^{100}(X\geq 33)\approx 0{,}0446$

b) Fehler 2. Art: Mehr als 25% aller Studenten haben keinen Nebenjob, unter den getesteten sind aber nur höchstens 32 von 100 ohne Nebenjob.
Tatsächlich haben 50% aller Studenten keinen Nebenjob, dann ist die WS für einen Fehler 2. Art:
$P_{0,5}^{100}(X\leq 32)\approx 0{,}0002$

S119/4

a) Die Agentur wird irrtümlich bezahlt. Heißt:
Ein Erfolgsfall tritt im Test ein, obwohl der Spitzenkandidat nicht über 80% bekannt ist:
$P_{0,8}^{200}(X \geq 170)$ lässt sich nicht nachschauen

$P_{0,8}^{200}(X \geq 170) = 1 - P_{0,8}^{200}(X < 170) = 1 - 0{,}95698 \approx 0{,}04$

b) Die Agentur erhält irrtümlich kein Geld. Heißt:
Der Spitzenkandidat ist mit 85% bekannt, der Test klappt aber nicht:
$P_{0,85}^{200}(X < 170) = 0{,}45149 \approx 0{,}45$

c) Es müssen mindestens 163 der Befragten den Spitzenkandidaten kennen
$P_{0,85}^{200}(X < 163) = 0{,}07198 \approx 0{,}072$

d) Die Bekanntheitsgrade müssen mit der Einwohnerzahl gewichtet werden.

S119/5

a) Fehler 2. Art: $P_{0,2}^{30}(X \leq 5) = 0,6676$

b) Signifikanzniveau: WS für Fehler 1. Art.
$\Rightarrow \alpha < 5\%$

$P_{0,15}^{30}(X \geq 6) = 1 - P_{0,15}^{30}(X \leq 5) = 1 - 0,7106 = 0,2894$

$P_{0,15}^{30}(X \geq 7) = 1 - P_{0,15}^{30}(X \leq 6) = 1 - 0,8474 = 0,1526$

$P_{0,15}^{30}(X \geq 8) = 1 - P_{0,15}^{30}(X \leq 7) = 1 - 0,9302 = 0,0698$ fast erreicht!

$P_{0,15}^{30}(X \geq 9) = 1 - P_{0,15}^{30}(X \leq 8) = 1 - 0,9722 = 0,0278 < 5\%$ ☺

Für ein Signifikanzniveau von α = 5% muss der Annahmebereich im Intervall von 0 bis einschließlich 8 liegen.

S119/6

a) $H_0 : p \geq 0,8$

Fehler 1. Art: tatsächlich sind 80% oder mehr für den Ausbau, die Hypothese wird aber verworfen, weil die Anzahl der Befürworter im Ablehnungsbereich liegen.

$\bar{A} = \{0..\mathrm{k}\}; A = \{k+1..100\}$

Bedingung für den Fehler 1. Art: $P_{0,8}^{100}(X \leq k) < 0,1$

probieren:

$X \leq 71 : P_{0,8}^{100}(X \leq 71) \approx 0,0200 < 0,1$

$X \leq 72 : P_{0,8}^{100}(X \leq 72) \approx 0,0342 < 0,1$

$X \leq 73 : P_{0,8}^{100}(X \leq 73) \approx 0,0558 < 0,1$

$X \leq 74 : P_{0,8}^{100}(X \leq 74) \approx 0,0875 < 0,1$

$X \leq 75 : P_{0,8}^{100}(X \leq 75) \approx 0,1314 > 0,1$

Also ist X<=74 der größtmögliche Ablehnungsbereich, bei dem der Fehler 1. Art und 10% bleibt.

$\bar{A}$ = {0..75}, $\bar{A}$ = {76..100}.

Entscheidungsregel: Wenn 74 oder weniger für den Ausbau sind, dann soll die Hypothese verworfen werden.

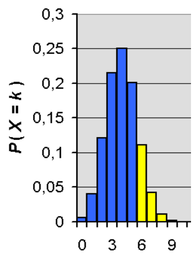
b)

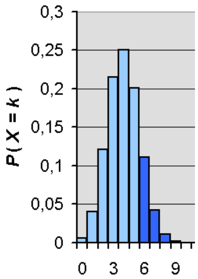
Unter den Autofahrern auf der Autobahn wird die Akzeptanz für den Ausbau wahrscheinlich höher sein, als unter allen Einwohnern von Oberhausen.

S124/6a

Es handelt sich um $B(10\,;\frac{2}{5};k)$

A) Mehr Treffer als Nieten:





$P_{0,4}^{10}(X>5)=B(10;\frac{2}{5};6)+...+B(10;\frac{2}{5};10)$

bilde also die Summe aus

$\binom{10}{6}\cdot 0{,}4^6\cdot 0{,}6^4+...+\binom{10}{10}\cdot 0{,}4^{10}\cdot 0{,}6^0$ oder schaue in der Tabelle nach

Suche zuerst Binomialverteilung kumulativ, dann n = 10, dann die Spalte mit p = 0,4.

<u>Problem</u>: Die Tabelle bietet nur das Gegenteil an:

<u>Trick</u>: Beide Summen addieren sich zu 1.

Zur Berechnung des Intervalls zwischen 6 und 10:

Suche $P_{0,4}^{10}(X\leq 5)\approx 0{,}83$ und Berechne $1-P_{0,4}^{10}(X\leq 5)\approx 0{,}17$!

B) Die Gesamtwahrscheinlichkeit ergibt sich aus der WS für genau drei Treffer in den ersten neun Spielen und der WS für einen Treffer im letzten Spiel:

$P=B(9;\frac{2}{5};3)\cdot 0{,}4\approx 0{,}25\cdot 0{,}4=0{,}10$, also 10%