Abi 76 lk Ana I

Gegeben ist die Schar von Funktionen

$$f_k : x \mapsto f_k(x) = \frac{ke^x}{k-e^x}, k \in \mathbb{R} \text{ und } k \neq 0$$

mit jeweils maximalem Definitionsbereich D_k.

1. a) Bestimmen Sie D_k mit einer Fallunterscheidung bezüglich k. (3 BE)
   b) Wie verhält sich $f_k(x)$, wenn x gegen die Grenzen von D_k strebt? (5 BE)
   c) Berechnen Sie, soweit vorhanden, Achsenschnittpunkte, Extrem- und Wendepunkte der den Funktionen f_k zugeordneten Graphen. (10 BE)

   [Zur Kontrolle: $f_k'(x) = \frac{k^2e^x}{(k-e^x)^2}$]
   d) Geben Sie den Wertebereich W_k von f_k an. (4 BE)
   e) Skizzieren Sie die zu f_2 und f_{-2} gehörigen Graphen unter Berücksichtigung der gewonnenen Ergebnisse (Querformat; Urspung in Blattmitte; Längeneinheit 2cm). (4 BE)

2. Für jedes $k \neq 1$ ist eine Integralfunktion F_k festgelegt durch
   $x \mapsto F_k(x) = \int_0^x f_k(t)dt$ mit maximalem Definitionsbereich B_k.

   a) Bestimmen Sie B_k. wobei zwischen $k < 0, 0 < k < 1$ und $k > 1$ zu unterscheiden ist. (5 BE)
   b) Geben Sie nun eine integralfreie Darstellung von $F_k(x)$ an. (6 BE)
   c) Für welche Werte von k existiert $\lim_{x\to-\infty} F_k(x)$? Wie lässt sich in diesen Fällen der Grenzwert geometrisch deuten? (5 BE)

3. a) Warum besitzt jede Funktion f_k eine Umkehrfunktion g_k? Geben Sie jetzt die Gleichung von g_k in der Form $y = g_k(x)$ an. Welchen Definitionsbereich hat g_k? (6 BE)
   b) Tragen Sie die Graphen von g_2 und g_{-2} in das Koordinatensystem von 1e) ein. (2 BE)

Abi 76 lk Ana II

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto f(x) = arcsin(2x-1)$ mit maximalem Definitionsbereich D_f.

1. a) Bestimmen Sie D_f und geben Sie den Wertevorrat W_f an. (2 BE)

   b) Zeigen Sie, dass für alle $|d| < \frac{1}{2}$ folgende Beziehung gilt:

   $$f(\tfrac{1}{2} - d) = -f(\tfrac{1}{2} + d).$$

   Wie lässt sich diese Aussage für den Graphen G_f der Funktion f deuten? (6 BE)

   c) Berechnen Sie nun die Ableitungsfunktion f' und geben Sie deren Definitionsbereich $D_{f'}$ an.

   [Teilergebnis: $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$]
   Untersuchen Sie das Verhalten von f' an den Grenzen von $D_{f'}$

   d) Skizzieren Sie den Graphen G_f unter Verwendung der gewonnenen Ergebnisse in ein Koordinatensystem (Hochformat; Längeneinheit 4cm; $\pi \approx 3$). (3 BE)

   e) Für welche $x \in D_{f'}$ gilt: $f'(x) < \frac{4}{3} \cdot \sqrt{3}$? (4 BE)

2. Zeigen Sie, dass die Funktion f umkehrbar ist und berechnen Sie dann die Gleichung der Umkehrfunktion g in der Form $y = g(x)$. Geben Sie den Definitionsbereich G_g an und skizzieren Sie den Graphen G_g in das schon angelegte Koordinatensystem. (6 BE)

3. Eine zur Funktion f gehörende Integralfunktion J hat die Gleichung $J(x) = \int_0^x f(t)dt$. Wie lautet deren maximaler Definitionsbereich D_j?

   Entscheiden Sie, ohne das Integral zu berechnen, ob die Funktion J Nullstellen bzw. Extrema besitzt; geben Sie, jeweils mit kurzer Begründung, die entsprechenden Stellen von D_j an. (5 BE).

4. Zuletzt sei noch die Funktion $h : x \mapsto h(x) = 2 \cdot arcsin(\sqrt{x})$ mit $D_h = \{x | 0 \leq x \leq 1\}$ zur Funktion f in Vergleich gesetzt.

   a) Weisen Sie nach, dass zwischen den Funktionen h und f folgender Zusammenhang besteht:

   $$h(x) = f(x) + \frac{\pi}{2}, \qquad x \in D_h.$$

   Tragen Sie den Graphen G_h als dritte Kurve in die Zeichnung ein. (4 BE)

   b) Bestimmen Sie den Wert des Integrals $\int_0^1 2 \cdot arcsin(\sqrt{x})dx$. (5 BE)

   (Die Berechnung lässt sich durch Verwendung früherer Ergebnisse vereinfachen.)

   c) Berechnen Sie allgemein $\int_0^x 2 \cdot arcsin(\sqrt{t})dt$ unter Verwendung der Teilaufgabe 4a. (10 BE)