

---

Abi 76 lk Ana I

Gegeben ist die Schar von Funktionen

$$f_k : x \mapsto f_k(x) = \frac{ke^x}{k-e^x}, k \in \mathbb{R} \text{ und } k \neq 0$$

mit jeweils maximalem Definitionsbereich  $D_k$ .

1. a) Bestimmen Sie  $D_k$  mit einer Fallunterscheidung bezüglich  $k$ . (3 BE)
- b) Wie verhält sich  $f_k(x)$ , wenn  $x$  gegen die Grenzen von  $D_k$  strebt? (5 BE)
- c) Berechnen Sie, soweit vorhanden, Achsenschnittpunkte, Extrem- und Wendepunkte der den Funktionen  $f_k$  zugeordneten Graphen. (10 BE)

$$[ \text{Zur Kontrolle: } f'_k(x) = \frac{k^2 e^x}{(k-e^x)^2} ]$$

- d) Geben Sie den Wertebereich  $W_k$  von  $f_k$  an. (4 BE)
  - e) Skizzieren Sie die zu  $f_2$  und  $f_{-2}$  gehörigen Graphen unter Berücksichtigung der gewonnenen Ergebnisse (Querformat; Ursprung in Blattmitte; Längeneinheit 2cm). (4 BE)
2. Für jedes  $k \neq 1$  ist eine Integralfunktion  $F_k$  festgelegt durch  $x \mapsto F_k(x) = \int_0^x f_k(t) dt$  mit maximalem Definitionsbereich  $B_k$ .
    - a) Bestimmen Sie  $B_k$ . wobei zwischen  $k < 0$ ,  $0 < k < 1$  und  $k > 1$  zu unterscheiden ist. (5 BE)
    - b) Geben Sie nun eine integralfreie Darstellung von  $F_k(x)$  an. (6 BE)
    - c) Für welche Werte von  $k$  existiert  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_k(x)$ ? Wie lässt sich in diesen Fällen der Grenzwert geometrisch deuten? (5 BE)
3. a) Warum besitzt jede Funktion  $f_k$  eine Umkehrfunktion  $g_k$ ? Geben Sie jetzt die Gleichung von  $g_k$  in der Form  $y = g_k(x)$  an. Welchen Definitionsbereich hat  $g_k$ ? (6 BE)
  - b) Tragen Sie die Graphen von  $g_2$  und  $g_{-2}$  in das Koordinatensystem von 1e) ein. (2 BE)

---

Abi 76 lk Ana II

Gegeben ist die Funktion  $f : x \mapsto f(x) = \arcsin(2x - 1)$  mit maximalem Definitionsbereich  $D_f$ .

1. a) Bestimmen Sie  $D_f$  und geben Sie den Wertevorrat  $W_f$  an. (2 BE)

b) Zeigen Sie, dass für alle  $|d| < \frac{1}{2}$  folgende Beziehung gilt:

$$f\left(\frac{1}{2} - d\right) = -f\left(\frac{1}{2} + d\right).$$

Wie lässt sich diese Aussage für den Graphen  $G_f$  der Funktion  $f$  deuten? (6 BE)

c) Berechnen Sie nun die Ableitungsfunktion  $f'$  und geben Sie deren Definitionsbereich  $D_{f'}$  an.

$$[\text{Teilergebnis: } f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}]$$

Untersuchen Sie das Verhalten von  $f'$  an den Grenzen von  $D_{f'}$ .

d) Skizzieren Sie den Graphen  $G_f$  unter Verwendung der gewonnenen Ergebnisse in ein Koordinatensystem (Hochformat; Längeneinheit 4cm;  $\pi \approx 3$ ). (3 BE)

e) Für welche  $x \in D_{f'}$  gilt:  $f'(x) < \frac{4}{3} \cdot \sqrt{3}$ ? (4 BE)

2. Zeigen Sie, dass die Funktion  $f$  umkehrbar ist und berechnen Sie dann die Gleichung der Umkehrfunktion  $g$  in der Form  $y = g(x)$ . Geben Sie den Definitionsbereich  $G_g$  an und skizzieren Sie den Graphen  $G_g$  in das schon angelegte Koordinatensystem. (6 BE)

3. Eine zur Funktion  $f$  gehörende Integralfunktion  $J$  hat die Gleichung  $J(x) = \int_0^x f(t)dt$ . Wie lautet deren maximaler Definitionsbereich  $D_j$ ?

Entscheiden Sie, ohne das Integral zu berechnen, ob die Funktion  $J$  Nullstellen bzw. Extrema besitzt; geben Sie, jeweils mit kurzer Begründung, die entsprechenden Stellen von  $D_j$  an. (5 BE).

4. Zuletzt sei noch die Funktion  $h : x \mapsto h(x) = 2 \cdot \arcsin(\sqrt{x})$  mit  $D_h = \{x | 0 \leq x \leq 1\}$  zur Funktion  $f$  in Vergleich gesetzt.

a) Weisen Sie nach, dass zwischen den Funktionen  $h$  und  $f$  folgender Zusammenhang besteht:

$$h(x) = f(x) + \frac{\pi}{2}, \quad x \in D_h.$$

Tragen Sie den Graphen  $G_h$  als dritte Kurve in die Zeichnung ein. (4 BE)

b) Bestimmen Sie den Wert des Integrals  $\int_0^1 2 \cdot \arcsin(\sqrt{x})dx$ . (5 BE)

(Die Berechnung lässt sich durch Verwendung früherer Ergebnisse vereinfachen.)

c) Berechnen Sie allgemein  $\int_0^x 2 \cdot \arcsin(\sqrt{t})dt$  unter Verwendung der Teilaufgabe 4a. (10 BE)