## 0.1 Infinitesimalrechnung I

Gegeben ist die Funktion

$f : x \mapsto \frac{4}{x^2} ln\left(\frac{1}{x}\right)$

mit maximalem Definitionsbereich $D_f$. Ihr Graph wird mit $G_f$ bezeichnet.

1. a) Bestimmen Sie $D_f$ und die Nullstelle der Funktion f. (3BE)
   b) Untersuchen Sie das Verhalten von f an den Rändern von $D_f$. (5BE)

      $\left(\lim_{x\to\infty} \frac{ln(x)}{x^n} = 0 \text{ für } n \in \mathbb{N} \text{ darf ohne Beweis verwendet werden }\right)$

   c) Ermitteln Sie Art und Lage des Extrempunkts von $G_f$ sowie die Wertemenge von f.
   d) Bestimmen Sie die 2. Ableitung der Funktion f. Untersuchen Sie damit das Krümmungsverhalten des Graphen $G_f$ und zeigen Sie, dass $G_f$ genau einen Wendepunkt bestzt. Geben Sie seine Koordinaten an. (7BE)

      $\left[\text{Teilergebnis: } f''(x) = 4 \cdot \frac{5-6ln(x)}{x^4}\right]$

   e) Zeichnen Sie mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse und unter Verwendung des Punktes $P(0,75|y_p)$ den Graphen $G_f$ im Bereich $0,75 \leq x \leq 3$ (Längeneinheit 2cm). (5BE)
2. a) Zeigen Sie, dass die Funktion $F : x \mapsto 4 \cdot \frac{1+ln(x)}{x}$ mit $x \in \mathbb{R}^+$ eine Stammfunktion von f ist. (3PE)
   b) Berechnen Sie den Inhalt des endlichen Flächenstücks, das durch die x-Achse den Graphen $G_f$ und die Gerade $x = e$ begrenzt wird, auf 2 Dezimalen gerundet.
   c) Geben Sie die Integralfunktion $I : x \mapsto \int_1^x f(t)dt, x \in (R)^+$, in integralfreier Darstellung an, und bilden Sie $\lim_{x\to\infty} f(x)$. Wie lässt sich am Graphen $G_f$ der Betrag des Grenzwertes deuten? (6BE)

## 0.2 Infinitesimalrechnung II

Gegeben ist die Funktion

$f : x \mapsto \frac{x^2+3}{x+1}$

im maximalen Definitionsbereich $D_f$. Ihr Graph sei $G_f$.

1. a) Bestimmen Sie $D_f$ und untersuchen Sie $G_f$ auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen. (3BE)
   b) Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten von $G_f$ an. (5BE)
   c) Bestimmen Sie Art und Lage der Extrempunkte von $G_f$.(9BE)

      $\left[\text{Teilergebnis: } f'(x)\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}\right]$

   d) Zeichnen Sie unter Verwndung der bisherigen Ergebnisse die Asymptoten und den Graphen $G_f$ im Bereich $-5 \leq x \leq 5$ (Längeneinheit 1cm). (5BE)
2. Gegeben ist ferner die Funktion:

   $g : x \mapsto \frac{x^3+2x-1}{x(x+1)}$

   mit $D_g = \mathbb{R}^+$; ihr Graph sei $G_g$.

   a) Bestimmen Sie das Verhalten von $G_g$ am linken Rand des Definitionsbereiches $D_g$. (2BE)
   b) Weisen Sie nach, dass für $x \in \mathbb{R}^+$ gilt: $f(x) - g(x) = \frac{1}{x}$. Wie lässt sich daraus folgern, dass für $x > 0$ der Graph $G_g$ unterhalb von $G_f$ liegt? (6BE)
   c) Zeigen Sie, dass $G_g$ und die Gerade $h : y = x - 1$ genau einen gemeinsamen Punkt $S(x_S|y_S)$ besitzen. Berechnen Sie seine Koordinaten. (4BE)
   d) Skizzieren Sie $G_g$ mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse in die Figur zu Teilaufgabe 1d ein, indem Sie außerdem berücksichtigen, dass $G_g$ für $x > x_S$ oberhalb der Geraden h verläuft (Nachweis nicht erforderlich). (2BE)
   e) Berechnen Sie den Inhalt A des Flächenstücks, das von $G_f$ und $G_g$ sowie den Geraden $x = 1$ und $x = 3$ begrenzt wird. (4BE)

*Abi 86 WS I*

In einer Urne befinden sich 8 gleichartige Kugeln; fünf davon sind weiß und tragen die Ziffern 1 bis 5, drei sind rot und tragen die Ziffern 6 bis 8.

1. Ein Spieler zieht drei Kugeln aus der Urne,

   a) indem er nach jedem Zug die gezogene Kugel wieder in die Urne zurücklegt,

   b) ohne die gezogen Kugel zurückzulegen.

   Wie groß ist in jedem der beiden Fälle die Wahrscheinlichkeit für die Farbfolge rot-weiß-rot?

2. Wie oft muss der Spieler aus obiger Urne eine Kugel mit Zurächlegen mindestens ziehen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99,5/

3. Der Spieler entnimmt nun der Urne gleizeitig drei Kugeln

   a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit entnimmt er zwei rote und eine weiße Kugel?

   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist unter den drei gezogenen Kugeln die Kugel mit der Ziffer 7 oder die Kugel mit der Ziffer 8?

4. Jemand legt nun zusätzlich zwei gleichfarbige Kugeln, entweder zwei rote oder zwei weiße in die Urne. Um zu entscheiden, ob zwei rote oder zwei weiße Kugeln hinzugelegt wurden, führt man folgenden Test durch: Man zieht aus der Urne 20mal mit Zurücklegen eine Kugel. Erhält man dabei weniger als 12 weiße Kugeln, so nimmt man an, dass zwei rote Kugeln in die Urne gelegt wurden; andernfalls nimmt man an, dass zwei weiße Kugeln hineingelegt wurden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit entscheidet man sich irrtümlich für das Hinzufügen roter, mit welcher Wahrscheinlichkeit irrtümlich für das Hinzulegen weißer Kugeln?