1 Abi 17 Lsg Geo II

A 1 a) Drei Möglichkeiten, die Rechtwinkligkeit zu zeigen:

- Skalarprodukt der Vektoren $\vec{CA}$ und $\vec{CB}$ ist Null:

$$\vec{CA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{CB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}; 2 \cdot 2 + 1 \cdot -5 + 1 \cdot 1 = 0\checkmark$$

- Alle drei Punkte liegen auf einem Thaleskreis um den Mittelpunkt von [AB]
- Es gilt der Satz des Pythagoras

b) Da die beiden Punkte bezüglich der x_1x_3-Ebene symmetrisch liegen, muss ein zu C symmetrisch liegender Punkt die gleiche Bedingung erfüllen: $D = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Oder algebraisch:

Sei D(0|k|0) ein Punkt auf der x_2-Achse mit einem 90^o-Winkel. Dann muss gelten:

$$\vec{DA} \circ \vec{DB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3-k \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -3-k \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 2 + (3-k) \cdot (-3-k) + 1 \cdot 1 = 0$$

$4 - (3-k)(3+k) + 1 = 0$

$5 - (9 - k^2) = 0$

$k^2 = 4 \Rightarrow k = \pm 2\checkmark$

2 a) Spurpunkt $S_1 = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; S_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -18 \\ 0 \end{pmatrix}; A = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 18 = 81$

b) Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Bilde eine Gerade aus diesem Richtungsvektor und dem Ursprung als Aufpunkt:

$$g : \vec{X} = \lambda \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 2\lambda \\ \lambda \\ -2\lambda \end{pmatrix} \text{ in E:}$$

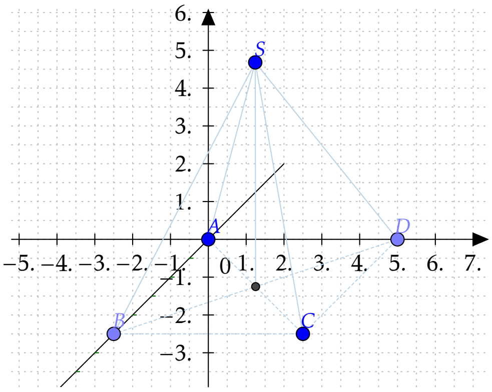
$2 \cdot 2\lambda + \lambda + (-2) \cdot (-2\lambda) + 18 = 0$

$4\lambda + \lambda + 4\lambda + 18 = 0$

$9\lambda + 18 = 0 \Rightarrow \lambda = -2$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

B a) Darstellung:



b) Zwei linear unabhängige Vektoren in dieser Ebene sind:

$\vec{DS} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ -2,5 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \vec{AS} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 2,5 \\ 6 \end{pmatrix}$

Um den Normalenvektor zu bestimmen brauchen wir das Kreuzprodukt. Da die Länge der Vektoren dafür keine Rolle spielt, und es keinen Spaß macht Kommazahlen zu multiplizieren, kann man die Vektoren verdoppeln:

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 12 \end{pmatrix}; \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix};$

$\vec{n}' = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -60-60 \\ 60-60 \\ 25+25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -120 \\ 0 \\ 50 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 - 0 \\ x_2 - 0 \\ x_3 - 0 \end{pmatrix} = 12x_1 - 5x_3 = 0\checkmark$

c) Die Normalenvektoren zweier benachbarter Ebenen sind bekannt:

$n_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad n_F = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ Bestimme also deren Zwischenwinkel:

$cos(\alpha) = \frac{0 \cdot 12 + 0 \cdot 12 - 5 \cdot 5}{\sqrt{169} \cdot \sqrt{169}} = \frac{-25}{169} \approx -0,148$

$\Rightarrow \alpha \approx 98,5^o$

d) Suche einen Punkt auf der Symmetrieachse der Pyramide, der von einer Zeltwand 50cm entfernt ist.

Symmetrieachse: $s : \vec{X} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 2,5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 2,5 \\ \lambda \end{pmatrix}$

Dies kennzeichnet die Menge aller Punkte, die auf der Symmetrieachse der Pyramide liegen. Wenn einer dieser Punkte 0,5 von der Ebene E entfernt sein soll, dann muss er, in die HNF(E) eingesetzt 0,5 ergeben:

HNF(E): $\frac{12}{13}x_2 + \frac{5}{13}x_3 - \frac{60}{13} = 0,5$, Punkte der Symmetrieachse einsetzen:

$\frac{12}{13} \cdot 2,5 + \frac{5}{13} \cdot \lambda - \frac{60}{13} = 0,5 | \cdot 26$

$12 \cdot 5 + 10\lambda - 120 = 13$

$10\lambda = 47 \Rightarrow \lambda = 4,7$

$\vec{L} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 2,5 \\ 4,7 \end{pmatrix}$

e) Die Symmetrieachse geht durch S und durch den Mittelpunkt der Verbindungsstrecke von C und D: $\vec{M} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

$g : \vec{X} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2,5 \\ 6 \end{pmatrix}$

f) Schneide die Ebene E mit der Ebene H:$x_3 = 1,8$. H in Parameterform:

$\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1,8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ 1,8 \end{pmatrix}$

in E: $12\mu + 5 \cdot 1,8 - 60 = 0$

$12\mu = 51 \Rightarrow \mu = \frac{51}{12} = \frac{17}{4} = 4,25$

Als Schnittgerade ergibt sich also: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1,8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 4,25 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4,25 \\ 1,8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

z.B. liegt P(2,5|4,25|1,8) auf der Symmetrieachse aus e). Somit ergibt sich als Abstand zum Bodenpunkt:

$d = \sqrt{(5-4,25)^2 + (0-1,8)^2} = \sqrt{0,75^2 + 1,8^2} = 1,95$

Für die Fläche erhält man dann: $A = 1,95 \cdot 1,4 \approx 2,73$