1 Abi 15 Lsg Geo I

A 1 a) $\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{(2-0)^2+(5-1)^2+(6-2)^2} = \sqrt{4+16+16} = 6\checkmark$

Der Punkt B ist auf der Geraden 6 LE entfernt. Für 12 LE muss man sich doppelt so weit von A entfernen:

$\vec{C} = \vec{A} + 2\vec{AB}$; $\quad \vec{D} = \vec{A} - 2\vec{AB}$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$\vec{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}$$
$$\vec{D} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix}$$

b) 1. Möglichkeit: Hänge $\vec{AB}$ an E an:$\vec{F} = \vec{E} + \vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$

2. Möglichkeit: Hänge $-\vec{AB}$ an E an:$\vec{F} = \vec{E} - \vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

2 Ein Parallelogramm ist ein Rechteck, wenn ein Innenwinkel 90° beträgt:

$\vec{AB} \circ \vec{AD} = 4 \cdot 4 + 4 \cdot (-4) + 0 = 0\checkmark$
Länge der Kante: $h = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-4)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$V = \frac{1}{3} G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 24\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 48$

B a) Die Ebene liegt parallel zur x_2-Achse.

Zum Nachweis des Enthalten-Seins zeigt man zuerst, dass der Normalenvektor der Ebene auf dem Richtungsvektor der Gerade senkrecht steht:

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = 1 - 1 = 0\checkmark$ Zeige, dass der Aufpunkt der Geraden in E liegt:

$1 \cdot 0 + 0 \cdot \sqrt{2} + 1 \cdot 2 - 2 = 0 \checkmark$

$S_1 : x_1 + 0 - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2; \vec{S_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$S_3 : 0 + x_3 - 2 = 0 \Rightarrow x_3 = 2; \vec{S_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) Normalenvektor auf der horizontalen Ebene: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$sin(\alpha) = \frac{\vec{n} \circ \vec{u}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{u}|} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 30^o$

c) Berechne den Fußpunkt mit Hilfe der Abstandsberechnung Punkt-Gerade:

$$\vec{MX} = \vec{X} - \vec{M} = \begin{pmatrix} -\lambda - 0 \\ \sqrt{2} + \sqrt{2}\lambda - 3\sqrt{2} \\ 2 + \lambda - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda \\ \sqrt{2}\lambda - 2\sqrt{2} \\ \lambda \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} \circ \left(\vec{X} - \vec{M}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -\lambda \\ \sqrt{2}\lambda - 2\sqrt{2} \\ \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$\lambda + (2\lambda - 4) + \lambda = 0 \Rightarrow 4\lambda = 4 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2\sqrt{2} \\ 3 \end{pmatrix} \checkmark$$

$\vec{BM} = \sqrt{1 + 2 + 1} = 2 \Rightarrow r = 2$

d) $\vec{BM}$ steht senkrecht zur Geraden und hat die Länge eines Radiuses.

$\vec{BM} = \sqrt{1 + 2 + 1} = 2 \Rightarrow r = 2$

$\vec{v}$ zeigt in Geradenrichtung und $\left|\vec{v}\right| = \sqrt{1 + 2 + 1} = 2$ hat ebenfalls die Länge 2.

Wenn man senkrecht zu Geraden von B aus einen Radius mit r = 2 anträgt, dann erhält man M. Wenn man von dort aus in Geradenrichtung einen Radius anträgt, dann erhält man C. Also gilt: $\vec{C} = \vec{M} + \vec{v}$

e) Die Länge setzt sich aus der geraden Strecke [AB] und einem Viertelkreis k um M mit dem Radius zwei zusammen. $\left|\vec{B}-\vec{A}\right| = \sqrt{(-1-0)^2 + (2\sqrt{2}-\sqrt{2})^2 + (3-2)^2} = 2$

$k = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 2 = \pi$

Länge der gesamten Strecke in LE:$s = 2 + \pi \approx 5,14$

Länge im Modell: $s \approx 51,4m$

Bei einer Geschwindigkeit von 15 m/s benötigt der Wagen also etwa:

$51,4m : 15m/s \approx 3,43s$