

1 Abi 09 Lsg Ana I

1. $f(x) = a(x-b)(x-c)(x-d)$

Über die Nullstellen lässt sich ein Großteil des Terms in der faktorisierten Form aufstellen:

$$f(x) = a(x-0)(x-2)(x-4)$$

a lässt sich über den Punkt P ermitteln:

$$f(1) = 3 = a \cdot (1-0)(1-2)(1-4) = a \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-3) = a \cdot 3 \Rightarrow a = 1$$

$$f(x) = x \cdot (x-2) \cdot (x-4) = x \cdot (x^2 - 2x - 4x + 8) = x^3 - 6x^2 + 8 \checkmark$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 8$$

$$f''(x) = 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$f'''(x) = 6 \neq 0 \Rightarrow x = 2 \text{ ist WEP. } \checkmark$$

Gleichung der Wendetangente:

$$f(2) = 0; f'(2) = 3 \cdot 4 - 12 \cdot 2 + 8 = -4$$

$$T(x) = -4x + t$$

WEP(2|0) einsetzen:

$$0 = -4 \cdot 2 + t \Rightarrow t = 8$$

$$T(x) = -4x + 8 \checkmark$$

b) $\gamma = 90$ (Winkel beim Ursprung)

$$\tan(\alpha) = 8/2 = 4 \Rightarrow \alpha \approx 75,96$$

$$\beta = 90 - \alpha \approx 14,036$$

c) $F(4) = \int_0^4 x^3 - 6x^2 + 8x dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2 \right]_0^4 = \left(\frac{1}{4}4^4 - 2 \cdot 4^3 + 4 \cdot 4^2 \right) - 0 = 4^3 - 2 \cdot 4^3 + 14 \cdot 4^2 = 0$

Die beiden Flächenstücke besitzen also den gleichen Flächeninhalt. Aufgrund

ihrer gerichteten Flächeninhalte ist die Flächenbilanz über beide zusammen Null.

Inhalt eines Flächenstückes:

$$F(2) = \int_0^4 x^3 - 6x^2 + 8x dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2 \right]_0^2 = \left(\frac{1}{4}2^4 - 2^4 + 4 \cdot 2^2 \right) - 0 = 2^2 - 2^4 + 2^4 = 4$$

Die Summe der Inhalte beträgt also 8.

- d) Da sich bei Integration nach links über negative Funktionswerte positive Flächenbilanzen ergeben (also für x-Werte kleiner 0, sind die y-Werte größer 0), fällt Graph I aus.

Graph II weist im Intervall]0;4[drei Stellen mit waagerechter Tangente auf, dann müsste seine Ableitung f(x) in diesem Intervall drei Nullstellen haben, das ist aber nicht der Fall.

Deshalb kann nur Graph III der passende Graph sein.

- e) Jede Integralfunktion besitzt seine eigene untere Integrationsgrenze als Nullstelle. Die gesuchte Stammfunktion darf also keine Nullstelle haben. Beispielsweise:

$F(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 1$ (hier ist der Graph II um eins nach oben verschoben, es gibt also keine Nullstellen mehr).

2. a) $0,5m_0 = m_0 e^{k \cdot 13,2}$

$$0,5 = e^{k \cdot 13,2} \quad | \ln()$$

$$\ln(0,5) = k \cdot 13,2 \quad | : 13,2$$

$$k = \frac{\ln(0,5)}{13,2} \approx -0,05251$$

b) $m(t) = m_0 e^{-0,05251 \cdot t}$

$$\frac{m}{m_0} = e^{-0,05251 \cdot t} \approx 0,8105 = 81,1\%$$

$$0,1 = e^{-0,05251 t}$$

$$\ln(0,1) = -0,05251 t$$

$$t = \frac{\ln(0,1)}{-0,05251} \approx 43,8$$

Es dauert etwa 43,8 Stunden.