1 Abi 16 Lsg Ana I

A 1 $f : x \mapsto \sqrt{1 - ln(x)}$

$x > 0$, wegen $ln(x)$. $1 - ln(x) \geq 0 \Rightarrow 1 \geq ln(x) \Rightarrow e^1 \geq x \Rightarrow x \in]0;+e]$

b) $\sqrt{1 - ln(x)} = 2$

$1 - ln(x) = 4$

$-3 = ln(x)$

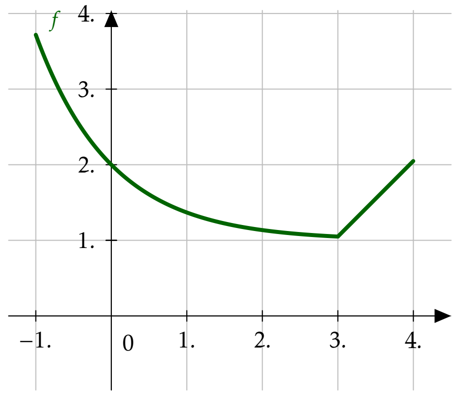
$x = e^{-3}$

Probe:

$\sqrt{1 - ln(e^{-3})} = \sqrt{1 - (-3)} = \sqrt{4} = 2\checkmark$

2 $f(-x) = (-x)^2 \cdot sin(-x) = x^2 \cdot (-sin(x)) = -x^2 \cdot sin(x) = -f(x) \Rightarrow$ Punktsymmetrie.

$\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(x) = 0$, da f(x) punktsymmetrisch.



3

4 a) Bei Hoch und Tiefpunkten ist die Tangentensteigung 0, das heißt bei x=1 und x=4 gilt $f'(x) = 0$. Die Ableitung einer Funktion ergibt eine Funktion zweiten Grades, deren Graph ist eine Parabel. Außerdem gilt bei x=1, dass der Graph rechtsgekrümmt ist (Hochpunkt), also $f''(1) = (f')'(1) < 0$, also ist der Graph der Ableitungsfunktion bei x=1 fallend. Umgekehrt ist der Graph der Ableitungsfunktion bei x=4 steigend, also muss sich dazwischen das Minimum der quadratis-

chen Funktion befinden. Somit ist die Parabel nach oben geöffnet.

b) Da sich die Nullstellen der Ableitungsfunktion bei x=1 und x=4 befinden, muss der Scheitelpunkt bei (1+4)/2 = 2,5 sein. Im Scheitelpunkt gilt $(f')'(2,5) = f''(2,5) = 0$. Nachdem aus 4a) bekannt ist, dass der G_f für x < 2,5 linksgekrümmt ist und für x > 2.5 rechtsgekrümmt, muss x = 2,5 ein Wendepunkt sein.

5 a) Durch Kästchenzählen kommt man auf etwa 9,5 Kästchen, also $A \approx 9,5 \cdot \frac{1}{4} = 2,125$

b) $F'(x) = 0,5$

c) $\int\limits_3^b f(x)dx = F(b) - F(3) = F(b) - 0 = F(b)$.

B 1 $f : x \mapsto e^{\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x}$

a) Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = 1 + 1 = 2$

$f(x) > 0$, da die Funktionswerte von $e^{\frac{1}{2}x} > 0$ und diejenigen von $e^{-\frac{1}{2}x}$ auch.

b) $f(-x) = e^{-\frac{1}{2}x} + e^{\frac{1}{2}x} = f(x)$, also symmetrisch zur y-Achse. $\lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{\to\infty} + \underbrace{e^{-\frac{1}{2}x}}_{\to 0} = +\infty = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ (wegen Symmetrie)

c) $f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$

$f''(x) = \frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{4} \cdot e^{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{4} \cdot f(x)$

Da $f(x) > 0 \Rightarrow f''(x) = \frac{1}{4}f(x) > 0$ also linksgekrümmt.

d) $f'(x) = 0 \Rightarrow e^{-\frac{1}{2}x} - e^{\frac{1}{2}x} = 0 \; e^{-\frac{1}{2}x} = e^{\frac{1}{2}x}$

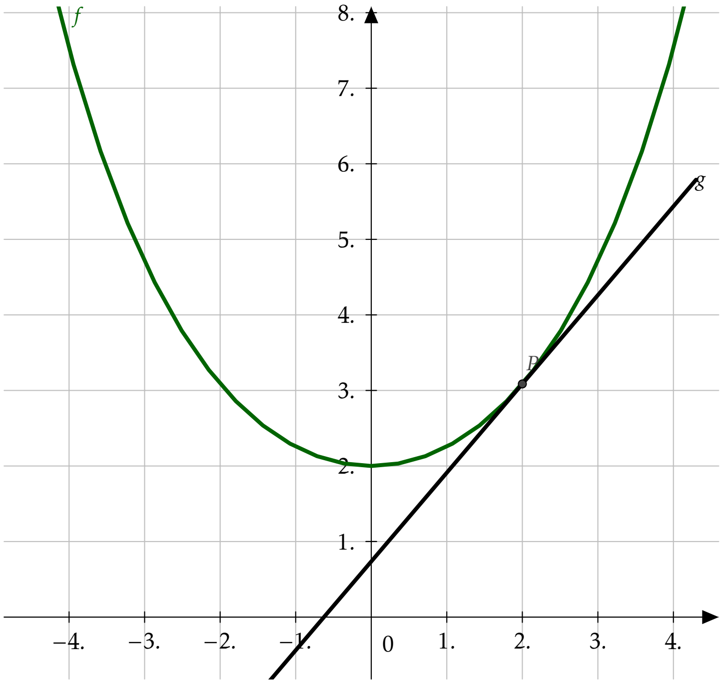
$-\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x \Rightarrow x = 0$

$f''(0) = \frac{1}{4}f(0) = 0,5 > 0 \Rightarrow$ linksgekrümmt, also Minimum Koordinaten: Min(0|2)

e) $f(2) = e + e^{-1} \approx 3,09$

$f'(2) = e - e^{-1} = e + \frac{1}{3} \approx 1,2$

f) $f(4) = e^2 + e^{-2} = e^2 + \frac{1}{e^2} \approx 7,52$



g) $\frac{1}{4}[f(x)]^2 = \frac{1}{4}\left(e^x + 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + e^{-x}\right)$

$= \frac{1}{4}(e^x + 2 + e^{-x}) = A$

$[f'(x)]^2 = \frac{1}{4}(e^x - 2 + e^{-x}) = B$

$A - B = \frac{1}{4}(e^x + 2 + e^{-x} - e^x + 2 - e^{-x}) = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1\checkmark$

h) $\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \int_a^b \sqrt{\frac{1}{4}[f(x)]^2} dx =$

$\int_a^b \frac{1}{2} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_a^b e^{\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x} dx = \frac{1}{2} \cdot \left[2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 2e^{-\frac{1}{2}x}\right]$

$L_{0;b} = \frac{1}{2}\left(2 \cdot e^{\frac{1}{2}b} - 2 \cdot e^{-\frac{1}{2}b} - (2-2)\right)$

$L_{0;b} = e^{\frac{1}{2}b} + e^{-\frac{1}{2}b}\checkmark$

2 a) Die Angaben können alle der Nr. 1 entnommen werden:

$f(4) - f(0) \approx 7,52 - 2 = 5,52$

b) $f'(4) \approx 3,63 = tan(\alpha) \Rightarrow \alpha = 15,4^0$

$L = 2 \cdot L_{0;4} = 2 \cdot \left(e^{\frac{1}{2} \cdot 4} - e^{-\frac{1}{2} \cdot 4}\right) = 2 \cdot \left(e^2 - e^{-2}\right) \approx 14,51$

Das Seil ist etwa 14,51m lang.

c) q(x) ist achsensymmetrisch und um 2 nach oben verschoben, also ist nur a unbekannt:

$q(x) = ax^2 + 2$

$q(4) = a \cdot 16 + 2 = e^2 + e^{-2} \Rightarrow a = \frac{e^2+e^{-2}-2}{16} \approx 0,35$

$\Rightarrow q(x) = (\frac{e^2+e^{-2}-2}{16})x^2 - 2$

d) Bilde die Differenzfunktion d(x), leite sie ab (d'(x)) und bestimme den x-Wert, bei dem d'(x) = 0 gilt.

Vergleiche alle d(x) für die Nullstellen und nimm den größten.