

1 Abi 16 Lsg Geo I

A 1 a)

b) Nachdem D die x_3 -Koordinate -2 besitzt, müssen die x_1 -Achse durch EH und die x_2 -Achse durch HG gehen. Es gilt dann $A(2|0|-2)$

c) $P(2|2|z)$ mit $|\vec{HP}| = 3 \Rightarrow \sqrt{2^2 + 2^2 + z^2} = 3$

$$4 + 4 + z^2 = 9 \Rightarrow z^2 = 1 \Rightarrow z = \pm 1$$

Aus der Situation ergibt sich $z = -1$ Also $P(2|2|-1)$.

$$2 \text{ a) } \vec{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{CA} = \vec{A} - \vec{C} = 2 \cdot \vec{AB} \Rightarrow \vec{C} = \vec{A} - 2 \cdot (\vec{B} - \vec{A})$$

$$\vec{C} = 3\vec{A} - 2\vec{B} = \begin{pmatrix} -6 + 8 \\ 3 - 0 \\ 12 - 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$b) \vec{AB} = \begin{pmatrix} -4 + 2 \\ 1 - 0 \\ 6 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Geradengleichung: } g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(-4+2)^2 + (1-0)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{4+1+4} = 3$$

Also liegt B auf der Geraden und ist von A genau 3 Einheiten entfernt. Gesucht ist eine Gerade mit Aufpunkt B und einem Richtungsvektor senkrecht zu \vec{AB} . Suche als Richtungsvektor einen, dessen Skalarprodukt mit \vec{AB} Null ergibt:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und als Gerade: } g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B \text{ a) } \vec{n}' = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$x_1 + x_2 + x_3 + c = 0$ Aufpunkt einsetzen: $6 + 3 + 3 + c = 0 \Rightarrow c = -12$ ergibt die Ebene.

$$x_1 + x_2 + x_3 - 12 = 0 \checkmark.$$

b) A, B und Z haben die gleiche x_3 -Koordinate, also liegen alle drei Punkte in einer Ebene, die parallel zur x_1x_2 -Ebene ist. Ein Normalenvektor wäre also $n_F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{C}' = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow C\vec{C}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = 6 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, linear abhängig. Also steht die Strecke $[CC']$ senkrecht auf der Ebene F.

c) Einige Punkte und Verbindungsvektoren:

$$\vec{A}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}; \vec{B}' = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}; A\vec{C}' = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Es reicht zu zeigen, dass ΔABZ ein gleichschenkelig rechtwinkliges Dreieck ist, denn bei Punktspiegelung ergibt sich daraus ein Quadrat.

$$\vec{ZA} \circ \vec{ZB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \text{ (rechtwinklig)}$$

$$|\vec{ZA}| = 3 = |\vec{ZB}|$$

$$\checkmark |\vec{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2 + 0} = \sqrt{2} \cdot 3 \checkmark$$

d) $V_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot (3\sqrt{2})^2 \cdot 3 = (3\sqrt{2})^2 = 9 \cdot 2 = 18$

Also gilt $V_{Oktaeder} = 2 \cdot 18 = 36$

e) Bestimme den Winkel zwischen den Normalenvektoren:

$$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{1 \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,577$$

$\alpha \approx 54,7^\circ$ Damit wurde der Winkel zwischen der waagerechten und der Seitenfläche bestimmt. Der Winkel zwischen der oberen und unteren Seitenfläche ist dann doppelt so groß: $\beta = 2\alpha = 109,4^\circ$

f) Kugelmittelpunkt: Z ; Kugelradius $\overline{ZC} = 3$.

$$\text{Kugelgleichung: } (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2 + (x_3 - 3)^2 = 9$$

$$\text{Kugelvolumen: } V = \frac{4}{3}\pi r^3 = 4 \cdot \pi \cdot 9 = 36\pi$$

$$\text{Anteil des Oktaedervolumens: } \frac{V_o}{V_k} = \frac{36}{36 \cdot \pi} = \frac{1}{\pi}$$