

1 Abi 84 Lsg Ana II

1. a) Definitionsbereich:

- Der Nenner des Bruches darf nicht Null werden: $x \neq 0$
- Das Argument der ln-Funktion darf weder Null noch negativ werden:

$$\frac{x-1}{2x} > 0$$

$$\frac{x}{2x} - \frac{1}{2x} > 0$$

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{2x} \quad | \cdot 2x$$

1. Fall: $x > 0$

$$x > 1 \Rightarrow x \in]1; \infty[$$

2. Fall: $x < 0$

$$x < 1 \Rightarrow x \in]-\infty; 0[$$

$$D_f =]-\infty; 0[\cup]1; \infty[$$

Asymptote bei $x=0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{x-1}{2x} \rightarrow \infty.$$

Da der natürliche Logarithmus mit wachsendem x über jede Grenze hinaus wächst, gilt auch:

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \ln\left(\frac{x-1}{2x}\right) \rightarrow \infty \text{ (senkrechte Asymptote bei } x=0\text{)}.$$

Asymptote bei $x=1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x-1}{2x} \rightarrow 0$$

Das führt als Argument der Logarithmusfunktion dazu, dass der Logarithmus kleiner als jeder negativer Wert wird:

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \ln\left(\frac{x-1}{2x}\right) \rightarrow -\infty \text{ (senkrechte Asymptote bei } x=1\text{)}.$$

Asymptote bei $y=-\ln 2$:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln\left(\frac{x-1}{2x}\right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln\left(\frac{1}{2} - \underbrace{\frac{1}{2x}}_{\rightarrow 0}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2^{-1}) = -\ln 2$$

$$\text{b) } f'(x) = \frac{1}{\frac{x-1}{2x}} \cdot \frac{2x-2(x-1)}{4x^2} = \frac{2x}{x-1} \cdot \frac{2}{4x^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{(x-1) \cdot x}$$

Monotonieverhalten:

$f'(x)$ besitzt keine Nullstellen, da der Zähler nicht den Wert 0 annehmen kann.

1. Fall: $x \in]-\infty; 0[$, dann ist der Nenner positiv (als Produkt zweier negativer Zahlen)

2. Fall: $x \in]1; \infty[$, dann ist der Nenner positiv (als Produkt zweier positiver Zahlen)

$\Rightarrow f'(x) > 0$, der Graph ist also streng monoton steigend.

c) Wertemenge:

Für $x \in]-\infty; 0[$ gilt $W_f =]-\ln 2; \infty[$

Für $x \in]1; \infty[$ gilt $W_f =]-\infty; -\ln 2[$

$\Rightarrow W_f = \mathbb{R} \setminus \{-\ln 2\}$

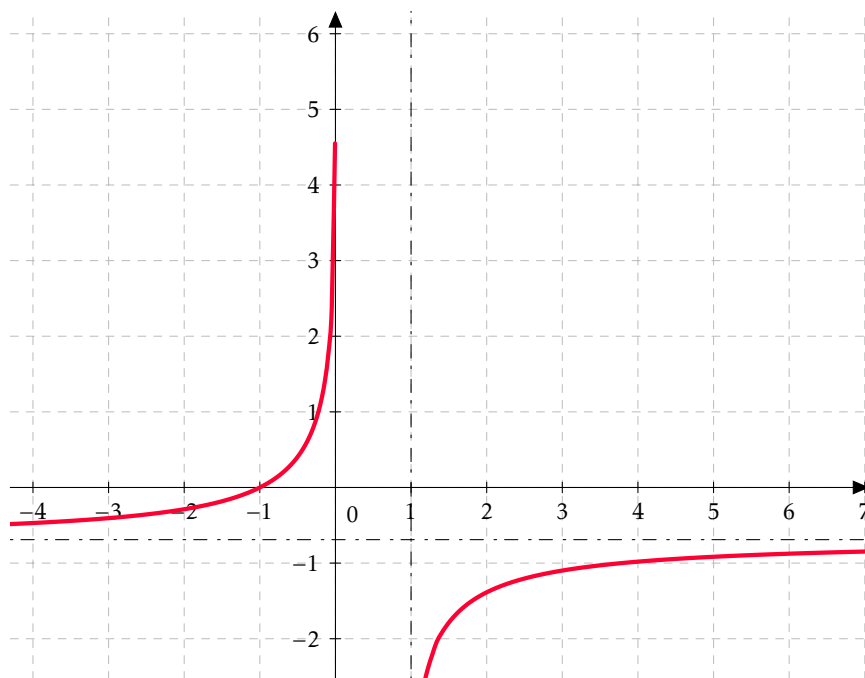
Nullstellen:

Die ln-Funktion wird nur dann Null, wenn das Argument 1 ist:

$$\frac{x-1}{2x} = 1 \Rightarrow x-1 = 2x \Rightarrow -1 = x$$

\Rightarrow Einzige Nullstelle $N(-1|0)$.

d) Graph:



2. a) $F(x) = x \cdot f(x) - \ln|x - 1|$ ist Stammfunktion.

$$F'(x) = f(x) + x \cdot f'(x) - \frac{1}{x-1} = f(x) + \frac{x}{(x-1) \cdot x} - \frac{1}{x-1} = f(x) \checkmark$$

b) $\int_2^u f(x) dx = [F(x)]_2^u = F(u) - F(2) = u \cdot f(u) - \ln(u - 1) - 2 \cdot f(2) + \ln(2 - 1)$

$$= u \cdot \ln\left(\frac{u-1}{u}\right) + 2 \cdot \ln 4 + 0$$

3. $x = \ln\left(\frac{y-1}{2y}\right) \quad |e^{\quad}$

$$e^x = \frac{y-1}{2y} \quad | \cdot 2y$$

$$2y \cdot e^x = y - 1 \quad | - y$$

$$y(2e^x - 1) = -1 \quad | : (2e^x - 1)$$

$$y = \frac{1}{1-2e^x} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{1-2e^x}$$

$$D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{-\ln 2\}$$

$$W_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus [0; 1]$$