

1 Abi 15 Lsg Ana I

A 1 a) $D = \mathbb{R}^+$

b) Ein Produkt ist Null, wenn einer der Faktoren Null ist:

$$x^3 - 8 = 0 \Rightarrow x_1 = 2$$

$$2 + \ln(x) = 0$$

$$\ln(x) = -2$$

$$x_2 = e^{-2}$$

2 a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty$ was nicht dem Graphen entspricht. Also muss es sich um den Graphen von $g(x)$ handeln.

$$b) \int_0^1 h'(x) dx = h(1) - h(0) = 3 - 1 = 2$$

3 a) z.B. $a = 6$

b) Der Graph von $x^2 - 4$ ist nach oben geöffnet und im Bereich $] - 2; +2[$ negativ. Also ist dieser Term geeignet um die gewünschte Definitionsmenge zu erzeugen:

$$g(x) = \sqrt{x^2 - 4} \text{ also } b = 4.$$

c) Der Wertebereich von $-e^x$ ist $W =] - \infty; 0[$. Also gilt für $4 + (-e^x)$: $W =] - \infty; 4[$, da der Graph um 4 in positiver Richtung verschoben wird.

4 Das Newtonverfahren nutzt die Nullstellen der Tangenten am Graphen, um sich der Nullstelle anzunähern. In H und T besitzt der Graph waagerechte Tangenten, die keine Nullstellen besitzen, also wird sich aus dem Startwert keine Folgewert berechnen lassen.

5 a) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 11$

$$f''(x) = 6x - 12$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ einzige Nullstelle, also WEP}$$

$$f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 11 \cdot 2 - 6 = 8 - 24 + 22 - 6 = 0$$

Der Graph von f geht also durch den Wendepunkt WEP(2|0).

Die Gerade $g(x) = x - 2$ geht ebenfalls durch diesen Punkt:

$$g(2) = 2 - 2 = 0 \text{ also ist } (2|0) \text{ auch ein Punkt der Geraden.} \checkmark$$

- b) Der Graph wird also um 1 in positiver x-Richtung und 2 in positiver y-Richtung verschoben:

$$h(x) = f(x - 1) + 2 = (x - 1)^3 - 6(x - 1)^2 + 11(x - 1) - 6 + 2$$

B 1 $f: x \mapsto \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3}$

a) $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} = \frac{x+3}{(x+1)(x+3)} - \frac{x+1}{(x+1)(x+3)} = \frac{2}{(x+1)(x+3)} \checkmark$

$$(x+1)(x+3) = x^2 + 4x + 3 \checkmark \frac{1}{0,5 \cdot (x+2)^2 - 0,5} = \frac{2}{(x+2)^2 - 1} = \frac{2}{x^2 + 4x + 4 - 1} = \frac{2}{x^2 + 4x + 3} \checkmark$$

b) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \underbrace{\frac{2}{x^2 + 4x + 3}}_{\rightarrow \infty} = 0$

Zwei Nullstellen im Nenner, die sich nicht kürzen lassen: $x = -1; x = -3$

$$f(0) = \frac{2}{1 \cdot 3} = \frac{2}{3}$$

- c) $f'(x) = 0$, genau dann wenn $p'(x) = 0$

$p(x)$ ist eine Parabel, deren einzige Stelle mit waagerechter Tangente der Scheitelpunkt ist. Da $p(x)$ bereits in Scheitelpunktform vorliegt, lässt sich $x = -2$ als x-Koordinate des Scheitelpunktes ablesen.

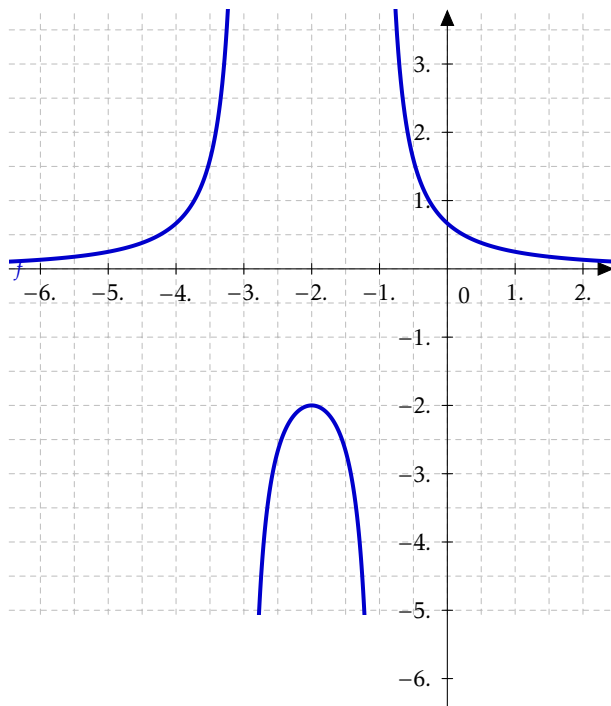
Weiterhing gilt, dass die Parabel nach oben geöffnet ist, weshalb $p'(x < -2) < 0$ und $p'(x > -2) > 0$.

Da $f'(x)$ aufgrund der angegebenen Formel jeweils das umgekehrte Vorzeichen besitzt, ist $f(x)$ im Intervall $] -3; -2[$ streng monoton steigend und im Intervall $] -2; -1[$ streng monoton fallend.

Der Extrempunkt von G_f liegt also bei $x = -2$. $f(-2) = -2$ also gilt HOP $(-2|-2)$.

d) $f(-5) = 0,25$

$f(-1,5) \approx -2,67$



2 $h: x \mapsto \frac{3}{e^{x+1}-1}; \quad D_h =]-1; +\infty[$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{3}{e^{x+1}-1}}_{\rightarrow \infty} = 0$

Nenner übersteigt jeden Wert, Zähler bleibt gleich, also geht der Term gegen 0.

$$h(x) = 3 \cdot (e^{x+1} - 1)^{-1}$$

$$h'(x) = -3 \cdot (e^{x+1} - 1)^{-2} \cdot e^{x+1} = -\frac{3 \cdot e^{x+1}}{(e^{x+1} - 1)^2} < 0$$

Da Zähler und Nenner im Definitionsbereich größer Null sind und diese Zahl mit (-1) multipliziert wird.

b) Im Definitionsbereich gilt: $x + 1 > 0$, also gilt $e^{x+1} > e^0 > 1$, also gilt $e^{x+1} - 1 > 0$.
Der Nenner ist also im Definitionsbereich stets positiv.

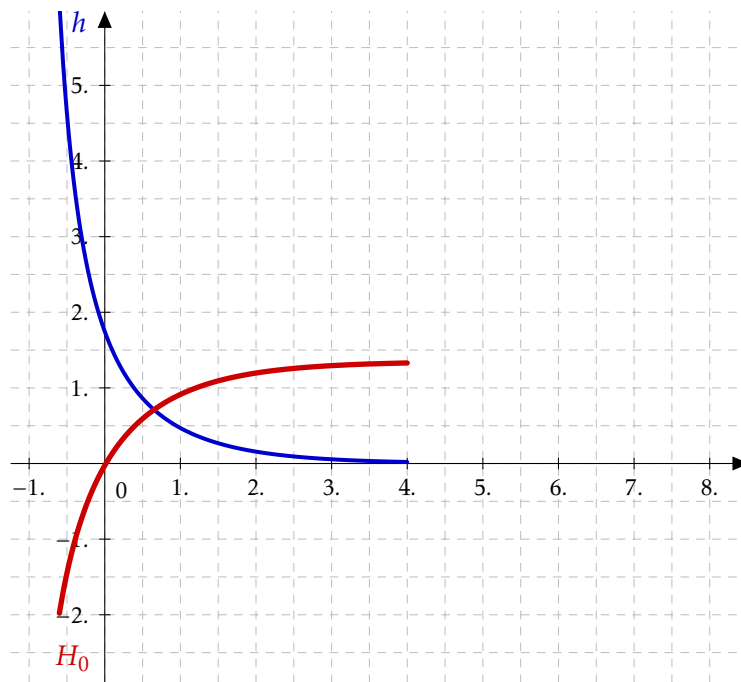
3 ist ebenfalls positiv. Also ist $h(x)$ im gesamten Definitionsbereich positiv.

Da aber gilt: $H_0'(x) = h(x)$ ist der Graph von H_0 streng monoton steigend (α).

Aus Teilaufgabe a ist bekannt $H_0''(x) = h'(x) < 0 \Rightarrow$ Rechtskrümmung im gesamten Definitionsbereich. (β)

c) Jede Integralfunktion hat ihre untere Grenze als Nullstelle: $x_1 = 0$

$$H_0(-0,5) \approx -1,4; \quad H_0(3) \approx 1,3;$$



3 a) $0,01 = \frac{3}{e^{x+1}-1}$

$$100 = \frac{e^{x+1}-1}{3}$$

$$300 = e^{x+1} - 1$$

$$301 = e^{x+1}$$

$$\ln(301) = x + 1$$

$$x = \ln(301) - 1 \approx 4,71$$

Nach 4,71 Minuten ist die Abbaurrate auf 0,01 Gramm zurückgegangen.

b) Der Graph wird mit Faktor drei in y-Richtung gestreckt und um 0,2 in negativer y-Richtung verschoben.

$$\begin{aligned}
\text{c) } \int_0^1 h(x) dx &\approx \int_0^1 k(x) dx = \int_0^1 3\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3}\right) - 0,2 dx \\
&= [3 \cdot (\ln(x+1) - \ln(x+3)) - 0,2x]_0^1 = 3 \cdot (\ln(2) - \ln(4)) - 0,2 - [3 \cdot (\ln(1) - \ln(3)) - 0] \\
&= -3 \cdot \ln(2) - 0,2 + 3\ln(3) \approx 1,02
\end{aligned}$$

Dies entspricht der in der ersten Minute abgebauten Menge an Schadstoffen in Gramm.