1 Abi 14 Lsg Ana II

A 1 a) $g(x) = sin(-x)$

b) $h(x) = sin(x) + 2$

c) $k(x) = sin(2x)$

2 a) $e^x \cdot \left(2x + x^2\right) = e^x \cdot x \cdot (2 + x)$

$\Rightarrow x_1 = 0; \quad x_2 = -2$

b) $F'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = \left(2x + x^2\right) \cdot e^x \checkmark$

$G(x) = x^2 \cdot e^x + C; \quad G(1) = 2e = 1^2 \cdot e^1 + C = e + C \Rightarrow C = e$

$G(x) = x^2 \cdot e^x + e$

3 Die zweite Ableitungsfunktion muss auf jeden Fall im angegebenen Intervall zwei Nullstellen besitzen. Damit fällt Graph II aus.

Wendepunkte kennzeichnen eine Änderung der Krümmung also muss die zweite Ableitung bei ihren Nullstellen einen Vorzeichenwechsel besitzen, was nur bei Graph I der Fall ist.

4 Es handelt sich um eine Extremwertaufgabe, Zielfunktion ist der Flächeninhalt des Rechtecks:

$A(x) = x \cdot (-ln(x))$ mit $D_A =]0;1[$

$A'(x) = -ln(x) + x \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) - ln(x) - 1$

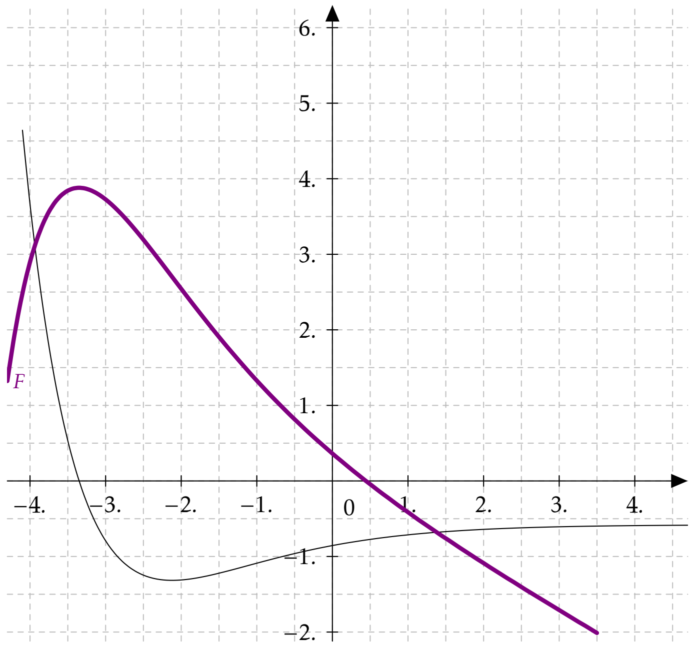
$A'(x) = 0 = -ln(x) - 1; \quad \Rightarrow ln(x) = -1 \Rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$

$f(e^{-1}) = -ln(e^{-1}) = -(-1) \cdot ln(e) = 1$

Die Seitenlängen des Rechtecks sind also $\frac{1}{e}$ in x-Richtung und 1 in y-Richtung.

5 a) Der Graph der Stammfunktion besitzt im angegebenen Intervall ein Maximum, da seine Steigung zuerst positiv und dann negativ wird.

b) Graphen:



B 1 $f : x \mapsto \frac{20x}{x^2-25}$

a) Definitionsmenge

Die Definitionsmenge wird durch Nullstellen des Nenners eingeschränkt:

$x^2 - 25 = (x+5)(x-5) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 5 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{-5, +5\}$

Symmetrie

$f(-x) = \frac{-20x}{(-x)^2-25} = -\frac{20x}{x^2-25} = -f(x) \Rightarrow$ Punktsymmetrie.

Nullstelle

$20x = 0 \Rightarrow x_3 = 0$ Nullstelle.

senkrechte Asymptoten

f besitzt bei $x_{1/2} = \pm 5$ (Nullstellen des Nenners) jeweils einen Pol, also eine senkrechte Asymptote:

$a_1 : x = -5; \qquad a_2 : x = +5;$

waagerechte Asymptote

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{20x}{x^2-25} = 0 \Rightarrow a_3 : y = 0$

weil die höchste Nennerpotenz größer als die höchste Zählerpotenz ist. Deshalb wird für große Zahlen der Nenner deutlich größer als der Zähler.

b) negative Steigung

$f'(x) = \frac{20 \cdot (x^2-25) - 20x \cdot 2x}{(x^2-25)^2} = \frac{20x^2 - 500 - 40x^2}{(x^2-25)^2} = -20 \frac{x^2+25}{(x^2-25)^2} < 0$

Der Bruch ist immer positiv. Bei Multiplikation mit -20 wird das Ergebnis also immer negativ sein.

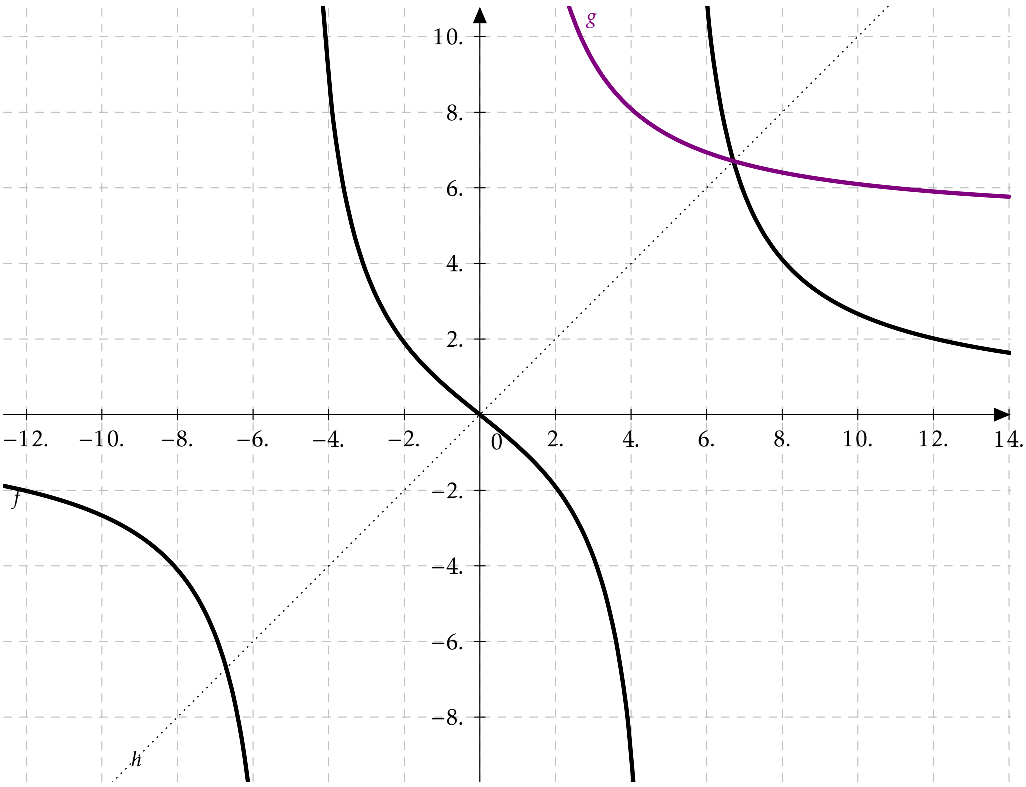
Winkel mit der x-Achse

Der Schnittpunkt mit der x-Achse ist bei $x_3 = 0$ (Nullstelle). Hier hat der Graph die Steigung:

$f'(0) = -\frac{20}{25} = -0,8 = tan(\alpha) \Rightarrow \alpha = -38,66.$

Der Graph schneidet die x-Achse in einem Winkel von $38,66$.

c) Graph:



d) Im für f* angegebenen Intervall kann jedem y-Wert höchstens ein x-Wert zugeordnet werden, was für den Definitionsbereich von f nicht gilt. Eine Funktion ist aber nur umkehrbar, wenn jedem y-Wert im Definitionsbereich nur höchstens ein x-Wert zugeordnet werden kann.

Der Graph der Umkehrfunktion ergibt sich durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden:

Ist unter 1c bereits violett eingetragen

e) $A(s) = \int_{10}^{s} f(x)dx = 10 \cdot \int_{10}^{s} \frac{2x}{x^2-25} dx = 10 \cdot \Big[ln(x^2-25)\Big]_{10}^{s}$

$A(s) = 10 \cdot (ln(s^2-25) - ln(100-25)) = 10 \cdot (ln(s^2-25) - ln(75)) = 10 \cdot ln\left(\frac{s^2-25}{75}\right) \checkmark$

f) $A(s) = 100 = 10 \cdot ln\left(\frac{s^2-25}{75}\right)$

$ln\left(\frac{s^2-25}{75}\right) = 10$

$\frac{s^2-25}{75} = e^{10}$

$s^2 - 25 = 75 \cdot e^{10}$

$s^2 = 75 \cdot e^{10} + 25$

$s = \sqrt{75 \cdot e^{10} + 25}$

g) Mit steigendem s übersteigt $\frac{s^2-25}{75}$ jeden Wert. Somit übersteigt auch der ln jeden Wert. Es gilt also:

$\lim\limits_{s \to \infty} A(x) = \infty$

2 a) $t(10) = \frac{10}{15} + \frac{10}{5} = \frac{10}{15} + \frac{30}{15} = \frac{40}{15} = \frac{8}{3} \approx 2,67$

$t(20) = \frac{10}{25} + \frac{10}{15} = \frac{30}{75} + \frac{50}{75} = \frac{80}{75} = \frac{16}{15} \approx 1,07$

b) Es gilt $t = \frac{s}{v}$. Die Entfernung sind 10km (Zähler) und die Geschwindigkeit ergibt sich aus der Überlagerung der Schiffs- und der Flussgeschwindigkeit. In der einen Richtung addieren sie sich, in der anderen ist die tatsächliche Geschwindigkeit um die Flussgeschwindigkeit reduziert.

c) In diesem Fall wäre die Bootgeschwindigkeit kleiner als die Flussgeschwindigkeit. Unter diesem Bedingungen würde das Boot den Rückweg nicht schaffen.

d) $t(x) = \frac{10}{x+5} + \frac{10}{x-5} = 10\frac{x-5}{x^2-25} + 10\frac{x+5}{x^2-25} = 10\frac{2x}{x^2-25} = \frac{20x}{x^2-25}$ ✓

e) Man zeichnet eine zur x-Achse parallele Halbgerade auf der Höhe der Gesamtfahrzeit in das Diagramm. Am Schnittpunkt von Graph und Halbgerade liest man den x-Wert ab. Dieser steht dann für die Bootsgeschwindigkeit in $\frac{km}{h}$.

$4 = f(x) = \frac{20x}{x^2-25}$

$1 = f(x) = \frac{5x}{x^2-25}$

$x^2 - 25 = 5x$

$x^2 - 5x - 25 = 0$

$x_{1/2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+100}}{2} = \frac{5 \pm 5\sqrt{5}}{2} = \frac{5}{2} \cdot (1 \pm \sqrt{5})$

Wegen des Modells ist nur die positive Lösung sinnvoll:

$x_2 = \frac{5}{2} \cdot (1 + \sqrt{5}) \approx 8,09$ Die Eigengeschwindigkeit muss also $8,09\frac{km}{h}$ betragen.