

1 Abi 08 Lsg Ana I

1. $f : x \mapsto \frac{8x}{x^2+4}$

a) Symmetrie

$$f(-x) = \frac{-8x}{(-x)^2+4} = -\frac{8x}{x^2+4}$$

$$f(-x) = -f(x)$$

Der Graph ist punktsymmetrisch.

Definitionsbereich Der Nenner ist immer positiv, da $x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 4 \geq 4$

Es gibt also keine Pole oder senkrechten Asymptoten.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, da der Nenner stärker wächst als der Zähler.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, da - " - .

$$f(0) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

b) $f'(x) = \frac{8 \cdot (x^2+4) - 8x \cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{8x^2+32-16x^2}{(x^2+4)^2} = \frac{32-8x^2}{(x^2+4)^2} = \frac{-8 \cdot (x^2-4)}{(x^2+4)^2}$

$$f'(x) = \frac{-8 \cdot (x^2-4)}{(x^2+4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 2; \quad x_1 = -2; x_2 = +2$$

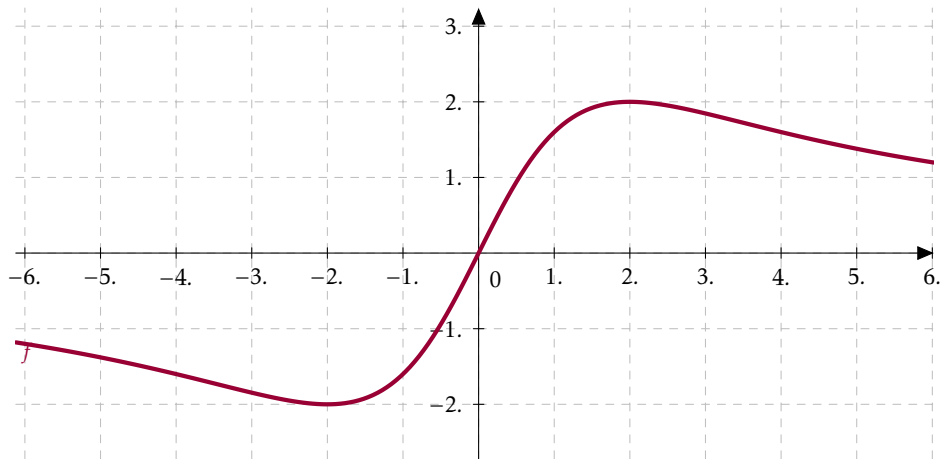
$$f(2) = 2; \quad f(-2) = -2$$

VZT	$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < +2$	$x = +2$	$2 < x$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
G_f	↗	TIP	↘	HOP	↗

c) Tangente an 0 im Ursprung hat den y-Achsenabschnitt $t = 0$. Die Steigung beträgt im Ursprung:

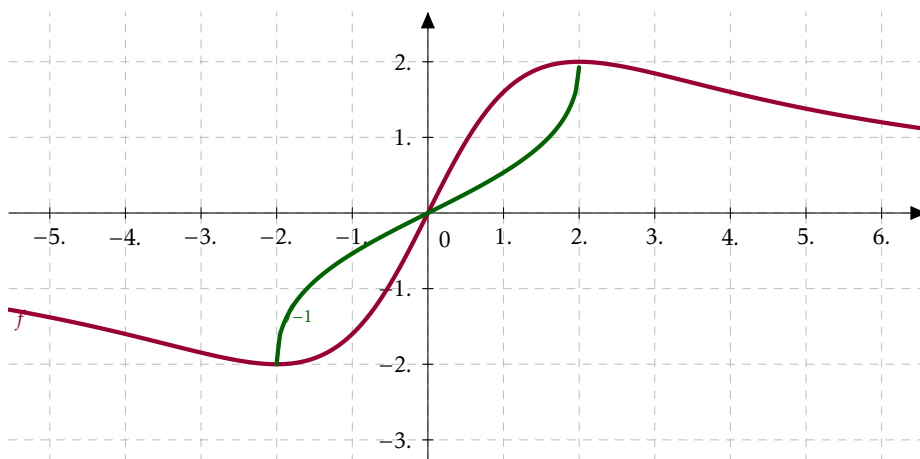
$$f'(0) = \frac{32}{16} = 2$$

$$f(1) = 1,6; \quad f(6) = 1,2$$

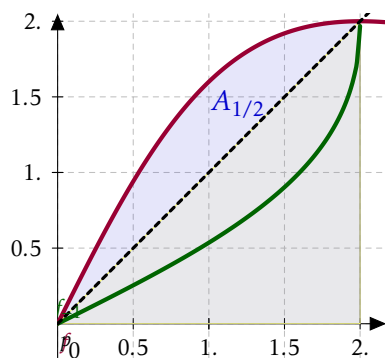


- d) Wie aus der Vorzeichentabelle hervorgeht, ist $f(x)$ im Intervall $] - 2; +2[$ streng monoton steigend und somit umkehrbar.

Der Graph ergibt sich durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden:



- e) Die beiden Graphen sind symmetrisch zur Winkelhalbierenden des 1. Quadranten. Daher lässt sich der halbe Flächeninhalt durch den Flächeninhalt zwischen der Winkelhalbierenden und dem Graphen von f berechnen:



Der halbe Flächeninhalt berechnet sich also zu:

$$\begin{aligned}
 A_{1/2} &= \int_0^2 f(x) dx - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = \left[4 \ln(x^2 + 4) \right]_0^2 - 2 \\
 &= 12 \cdot \ln(2) - 8 \cdot \ln(2) - 2 = 4 \ln(2) - 2 \approx 0,773 \\
 \Rightarrow A &\approx 2 \cdot 0,773 = 1,55
 \end{aligned}$$

2. $h : x \mapsto 8 - \frac{8x}{x^2+4}$

- a) Der Graph ist an der x-Achse gespiegelt ($-f(x)$) und um 8 in positiver y-Richtung verschoben. Der Extremwert ist also nach wie vor bei 2, das bedeutet dass er nach 2 Tagen erreicht wird. Wegen der Spiegelung an der x-Achse handelt es sich jetzt um das Minimum. Der Wert beträgt:

$$h(2) = 8 - 2 = 6 \text{ Der Sauerstoffgehalt ist dann 6 mg pro Liter.}$$

- b) Ursprünglicher Wert: $h(0) = 8$

$$\text{Grenzwert: } g = 0,95 \cdot 8 = 7,6$$

$$\text{Zeitpunkt: } h(x) = 7,6 = 8 - \frac{8x}{x^2+4}$$

$$\frac{8x}{x^2+4} = 0,4$$

$$8x = 0,4x^2 + 1,6$$

$$0,4x^2 - 8x + 1,6 = 0$$

$$x^2 - 20x + 4 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2}$$

$$x_1 \approx 0,2 \quad x_2 \approx 19,6$$

Nach etwa 19,6 Tagen hat der Sauerstoffgehalt wieder 95 % seines ursprünglichen Wertes erreicht.

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{1}{20} \int_0^{20} h(x) dx &= \frac{1}{20} \cdot \left[8x - 4 \ln(x^2 + 4) \right]_0^{20} \\ &= \frac{1}{20} (160 - 4 \ln(404) - 0 + 8 \ln(2)) \approx \frac{1}{20} \cdot 141,5 \approx 7,1 \end{aligned}$$

Der mittlere Sauerstoffgehalt beträgt also etwa 7,1 mg pro Liter.