1 Abi 09 Lsg Geo II gk

Gegeben $A(2|0|1), B(2|-2|0,5)$ und $C(0|-4|1)$, sowie $F: x_1 + x_2 + 2x_3 - 4 = 0$.

1. a) $E: \vec{X} = \vec{A} + \lambda(\vec{B} - \vec{A}) + \mu(\vec{C} - \vec{A}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -0,5 \end{pmatrix} + \mu' \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

   PaFo von E:

   $E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -0,5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

   Normalenvektor:

   $\vec{n}' = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -0,5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0,5 \\ 2 \end{pmatrix}$

   $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

   Normalenform von E: $2x_1 - 1x_2 + 4x_3 + c = 0$

   Aufpunkt einsetzen: $2 \cdot 2 - 1 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + c = 0 \Rightarrow c = -8$

   KoFo von E:

   $2x_1 - 1x_2 + 4x_3 - 8 = 0\checkmark$

   b) Möglichkeit 1: Zeige dass s in E und F liegt.

   $s: \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 - 2\sigma \\ 0 \\ \sigma \end{pmatrix}$

   in E: $2 \cdot (4 - 2\sigma) - 0 + 4 \cdot \sigma - 8 = 8 - 4\sigma + 4\sigma - 8 = 0$

   $0 = 0$ ist für jedes σ erfüllt, also liegt s in E.

   in F: $4 - 2\sigma + 0 + 2 \cdot \sigma - 4 = 0 \Rightarrow 0 = 0$

   s liegt in F.

   Möglichkeit 2: Schneide E und F.

   Setze PaFo von E in KoFo von F und löse das Gleichungssystem.

$E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2+\mu \\ -2\lambda+2\mu \\ 1-0,5\lambda \end{pmatrix}$ in F: $(2+\mu)+(-2\lambda+2\mu)+2(1-0,5\lambda)-4=0$

$2+\mu-2\lambda+2\mu+2-\lambda-4=0$

$0+3\mu-3\lambda=0 \Rightarrow \mu=\lambda$

in PaFo von E:

$$t: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -0,5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$t: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -0,5 \end{pmatrix}$$

Die Richtungsvektoren von t und s sind linear abhängig: $\vec{u} = -2 \cdot \vec{v}$ (zeigen also entlang der gleichen Geraden).

Der Aufpunkt von t liegt auf s, wenn man $\sigma = 1$ setzt. t ist also identisch mit s ✓.

Durch Variation von σ erhält man nur Punkte mit $x_2 = 0$, da weder Richtungsvektor noch Aufpunkt eine von Null verschiedene x_2-Komponente haben. Also liegt jeder Punkt von s in der x_1x_3-Ebene.

c) R ist der Aufpunkt von s, liegt also auf der Geraden.

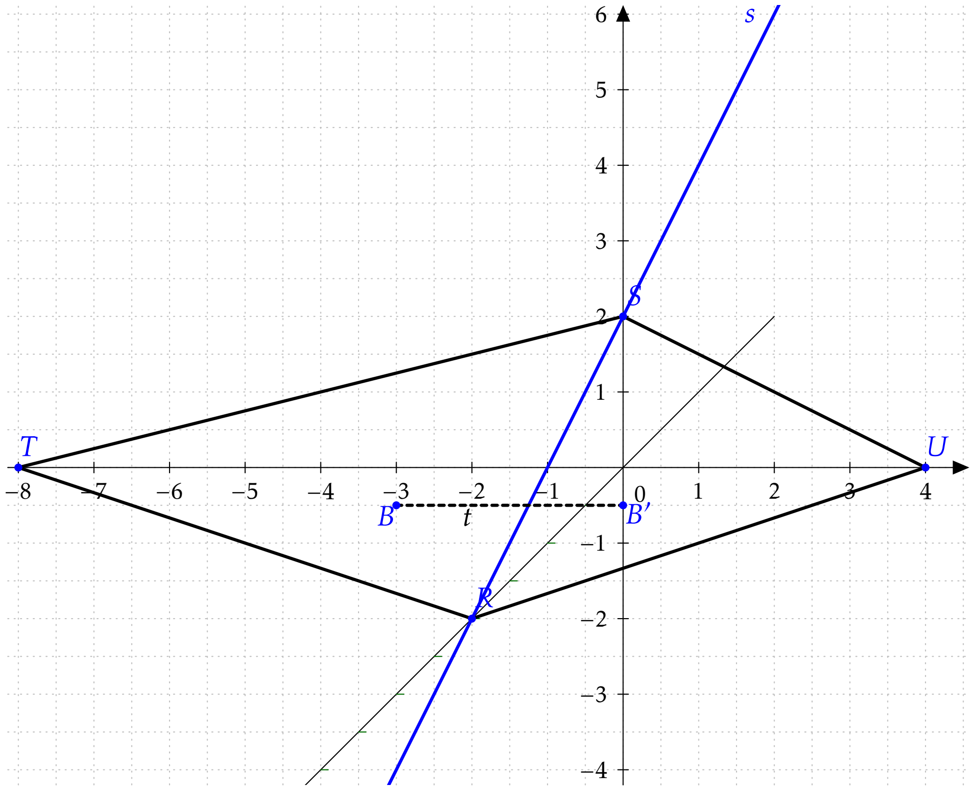
S ergibt sich für $\sigma = 2$ und liegt auch darauf.

Schnittpunkt mit x_2-Achse: x_1 muss 0 sein und auch x_3 muss 0 sein.

$x_1 = 0; x_3 = 0;$

In KoFo von E: $2 \cdot 0 - x_2 + 4 \cdot 0 - 8 = 0 \Rightarrow x_2 = -8 \Rightarrow T(0|-8|0)$

In KoFo von F: $0 + x_2 + 2 \cdot 0 - 4 = 0 \Rightarrow x_2 = 4 \Rightarrow U(0|4|0)$

d) 

2. a) Ein horizontaler Tunnel ist gerade. Die beschriebene Gerade hat den Aufpunkt B und einen Richtungsvektor mit x_3-Komponente 0 (horizontal) x_1-Komponente 0 (keine Südrichtung) und x_2-Komponente 1 (zeigt in Ostrichtung).

$$t : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0,5 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2+\tau \\ 0,5 \end{pmatrix}.$$

Der Tunnel hört beim Schnittpunkt von F mit t auf:

Setze t in KoFo von F: $2 + (-2+\tau) + 2 \cdot 0,5 - 4 = 0 \Rightarrow \tau = 3$

Der Tunnel reicht also von $\tau = 0$ bis $\tau = 3$. Da der Richtungsvektor die Länge 1 hat, ist der Tunnel insgesamt 3 Einheiten lang.

b) Bestimme die fehlenden Koordinaten von P:

$$TR : \vec{X} = T + \tau \cdot (\vec{R} - \vec{T}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau' \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Um das passende τ für P zu finden, betrachten wir die Gleichung für die erste

Komponente x_1:

$2 = 0 + \tau \Rightarrow \tau = 2$. Also findet sich P bei

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für den Verlauf der Zufahrtsstraße eignet sich der Vektor

$$\vec{P}B = \vec{B} - \vec{P} = \begin{pmatrix} 2-2 \\ -2+4 \\ 0,5-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

Der Vektor zeigt nicht in Nord/Südrichtung (keine x_1-Komponente), dagegen Richtung Osten (positive x_2-Komponente) und nach oben (positive x_3-Komponente).

c) Gesucht ist der Winkel zwischen $\vec{z} = \vec{P}B$ und seiner Projektion auf die $\vec{z'}$ x_1x_2-Ebene.

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0,5 \end{pmatrix}; \vec{z'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$|\vec{z}| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 0,5^2} = \sqrt{4,25} = \sqrt{\frac{1}{7}4} = \frac{1}{2}\sqrt{17}$

$|\vec{z'}| = 2$

$cos(\psi) = \frac{\vec{z} \circ \vec{z'}}{|\vec{z}| \cdot |\vec{z'}|} = \frac{4}{\frac{1}{2}\sqrt{17} \cdot 2} = \frac{4}{\sqrt{17}} \approx 0,97 \Rightarrow \psi \approx 14,04$

Suche auf der Geraden TR denjenigen Punkt F, von dem aus die Verbindungslinie FB senkrecht auf dem Richtungsvektor der Geraden steht.