

1 Abi 85 Lsg Ana II

1. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{1} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{0-2}{0+1} = -2$$

Die Asymptoten lauten also $y = 1$ und $y = -2$.

Schnittpunkt mit der y-Achse ($x = 0$): $f(0) = \frac{1-2}{1+1} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$

Schnittpunkt mit der x-Achse ($y = 0$): $0 = \frac{e^x-2}{e^x+1} \Rightarrow e^x - 2 = 0 \Rightarrow e^x = 2 \Rightarrow x = \ln 2$

b) $f'(x) = \frac{e^x(e^x+1) - (e^x-2)e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{3e^x}{(e^x+1)^2} \checkmark$

$f'(x) > 0$, da sowohl der Zähler als auch der Nenner immer positiv sind.

G_f ist also streng monoton steigend.

Mit den Ergebnissen aus 1a ergibt sich $W_f =] - 2; +1[$

c)
$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{3e^x(e^x+1)^2 - 3e^x \cdot 2(e^x+1) \cdot e^x}{(e^x+1)^4} \\ &= \frac{3e^x((e^x)^2 + 2e^x + 1 - 2(e^x)^2 - 2e^x)}{(e^x+1)^4} = \frac{3e^x(1 - (e^x)^2)}{(e^x+1)^4} \\ &= \frac{3e^x(1 - e^x)(1 + e^x)}{(e^x+1)^4} = \frac{3e^x(1 - e^x)}{(e^x+1)^3} \checkmark \end{aligned}$$

Wendepunkt: $f''(x) = 0$

Da alle anderen Faktoren im Zähler nicht Null werden können, muss gelten:

$$1 - e^x = 0 \Rightarrow x = 0$$

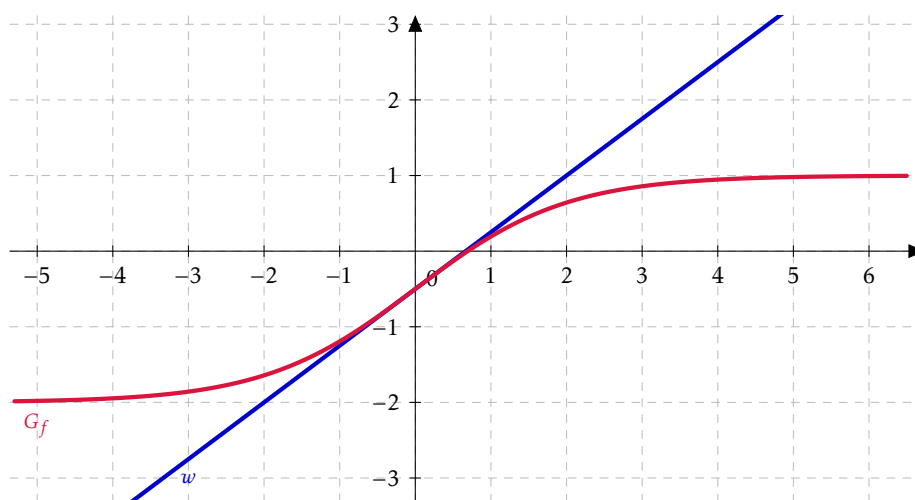
Mit 1a ergibt sich also WEP($0 | -\frac{1}{2}$)

Der y-Achsenabschnitt ist hier $t = -\frac{1}{2}$, weil die Tangente ja genau an dieser Stelle auch die y-Achse schneiden muss. Fehlt noch die Steigung m :

$$m = f'(0) = \frac{3}{2^2} = \frac{3}{4}$$

Gleichung der Wendetangente $w(x) = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$

d) Graph:



2. a) $F'(x) = \frac{3}{e^{x+1}} \cdot e^x - 2 = \frac{3e^x}{e^{x+1}} - \frac{2(e^x+1)}{e^{x+1}} = \frac{3e^x - 2e^x - 2}{e^{x+1}} = f(x) \checkmark$

b) Gesucht ist hier der Flächeninhalt oberhalb des Graphen, also der Inhalt zwischen Graph und seiner oberen Asymptote im Intervall zwischen 0 und 4. Zwei Integrale sind zu berechnen:

$$I_1 = \left| \int_0^{\ln 2} f(x) dx \right| = |F(\ln 2) - F(0)| = |3 \ln 3 - 2 \ln 2 - (3 \ln 2)|$$

$$= |3 \ln 3 - 5 \ln 2| = 0,17$$

$$I_2 = \int_{\ln 2}^4 f(x) dx = F(4) - F(\ln 2) = 3 \cdot \ln(e^4 + 1) - 8 - (3 \ln 3 - 2 \ln 2) = 2,14$$

$$A = A_{\text{Rechteck}} + I_1 - I_2 = 1,69$$