

1 Abi 10 Lsg Geo I

1. \vec{u} ist der Richtungsvektor von h, H(7|4|6) ihr Aufpunkt.

a) Echt parallel heißt parallel aber nicht identisch. Zu zeigen also:

- Richtungsvektoren linear abhängig
- A liegt nicht auf h

$$\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = -\vec{u}, \text{ also linear abhängig!}$$

Untersuche ob A auf h:

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 - 2\lambda \\ 4 + 3\lambda \\ 6 + 2\lambda \end{pmatrix}$$

In der ersten Komponente gilt $\lambda = 5$, in der zweiten $\lambda = -\frac{2}{3}$, WIDERSPRUCH!

Erstelle eine PaFo der Ebene:

$$E: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \vec{u} + \mu (\vec{H} - \vec{A})$$

Suche den Normalenvektor:

$$\vec{n}' = \vec{u} \times (\vec{H} - \vec{A}) = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 34 \\ -34 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

damit steht schon einmal dieser Teil der KoFo fest:

$$x_1 + 2x_2 - 2x_3 + c = 0$$

und c wird aus dem Einsetzen von A bestimmt:

$$-3 + 2 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) + c = 0 \Rightarrow c = -3 \checkmark$$

b) Bilde aus S und dem Normalenvektor von E eine Gerade. Ihr Schnittpunkt befindet sich in F:

$$i: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -11 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + \sigma \\ 7 + 2\sigma \\ -11 - 2\sigma \end{pmatrix}$$

In KoFo der Ebene E:

$$3 + \sigma + 2(7 + 2\sigma) - 2(-11 - 2\sigma) - 3 = 0$$

$$3 + \sigma + 14 + 4\sigma + 22 + 4\sigma - 3 = 0$$

$$36 + 9\sigma = 0 \Rightarrow \sigma = -4$$

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 3 - 4 \\ 7 - 8 \\ -11 + 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \vec{B} \checkmark$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3$$

Um von S nach B zu kommen, muss man diesen Vektor auf das vierfache verlängern ($\lambda = -4$), also gilt:

Der Abstand von S nach B ist $d = 4 \cdot 3 = 12$.

c) Bilde zuerst die Differenzvektoren:

$$\vec{BS} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix}; \quad \vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}; (\text{s.o.}) \quad \vec{AS} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix}$$

Winkel bei B:

$\cos(\beta) = 0; \Rightarrow \beta = 90$ da B der Fußpunkt des Lotes von S auf die Ebene ist, in der A und B enthalten sind.

Winkel bei A:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{AS} \circ \vec{AB}}{|\vec{AS}| \cdot |\vec{AB}|} = \frac{2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 + 2 \cdot 10}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{161}}$$

$$\Rightarrow \alpha = 71,04$$

$$\Rightarrow \gamma = 18,96 \text{ (Winkelsumme)}$$

d) Suche einen Punkt X der Geraden h, bei dem der Verbindungsvektor \vec{AX} senkrecht auf dem Richtungsvektor von h steht:

$$(\vec{X} - \vec{A}) \circ \vec{u} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 7 - 2\lambda - (-3) \\ 4 + 3\lambda - 2 \\ 6 + 2\lambda - (-1) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$(10 - 2\lambda) \cdot (-2) + (2 + 3\lambda) \cdot 3 + (7 + 2\lambda) \cdot 2 = 0$$

$$-20 + 4\lambda + 6 + 9\lambda + 14 + 4\lambda = 0$$

$$0 + 17\lambda = 0; \Rightarrow \lambda = 0$$

Fußpunkt des Lotes von A auf h ist also der Aufpunkt H selbst. Bestimmen nun den Abstand:

$$|\vec{AH}| = \sqrt{10^2 + 2^2 + 7^2} = \sqrt{9 \cdot 17} = 3\sqrt{17} \approx 12,37$$

2. a) Volumen eines Kegels: $V = \frac{1}{3}G \cdot h$

Die Grundfläche ist ein Kreis mit dem Radius \bar{AB} , daher gilt:

$$G = \pi r^2 = \pi \bar{AB}^2 = \pi \cdot 17 \approx 53,41$$

$$h = |\vec{BS}| = \sqrt{16 + 64 + 64} = 12$$

$$\Rightarrow V \approx \frac{1}{3} \cdot 53,41 \cdot 12 = 213,63$$

- b) Die Gerade BS ist das Rotationszentrum des Kegels. Die vom Zentrum am weitesten entfernten Punkte liegen auf dem Kreisrand der Grundfläche und haben den Abstand $\bar{AB} = \sqrt{17}$. Da sich die Gerade h in der gleichen Ebene wie die Grundfläche befindet (siehe Aufgabe 1b) reicht es deren Abstand von g zu wissen. Dieser Abstand beträgt aber $3\sqrt{17}$, wie unter 1d berechnet. Somit kann die Gerade den Kegel nicht einmal berühren.
- c) Betrachte den kleinen Kegel K_2 anstelle des Kegelstumpfes. Es gilt $h_2 = \frac{2}{3}h_1$. Nach dem Strahlensatz gilt dann auch $r_2 = \frac{2}{3}r_1$. Somit ergibt sich für das Volumen von K_2 :

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi r_2^2 \cdot h_2 = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{2}{3}r_1\right)^2 \cdot \frac{2}{3}h_1$$

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi r_1^2 \cdot h_1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}V_1$$

$$\frac{8}{27} \approx 0,296 = 29,6\%$$

Der kleine Kegel hat also 29,6 % Volumen des großen. Damit hat der Kegelstumpf 70,4% des großen Kegels.

d) Bestimme den Lotfußpunkt P' von P auf die Gerade BS . Wenn gilt:

$\frac{\overline{P'P}}{\overline{P'S}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BS}}$ dann ist (bis auf Rotationssymmetrie) der Stahlsatz erfüllt und P liegt auf der Mantelfläche.