1 Abi 12 Lsg Ana II

Teil 1 1 $f: x \mapsto \frac{2x+3}{x^2+4x+3}$

Definitionsmenge:

Nullstellen des Nenners: $x^2 + 4x + 3 = (x+1)(x+3) = 0 \Rightarrow x_1 = -1; x_2 = -3;$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3; -1\}$

Nullstelle:

$2x + 3 = 0 \Rightarrow x = -1,5$

2 $g: x \mapsto x \cdot e^{-2x}$.

a) Zur Untersuchung von Tangentensteigungen benötigt man die Ableitungsfunktion:

$g'(x) = 1 \cdot e^{-2x} + x \cdot e^{-2x} \cdot (-2) = e^{-2x} \cdot (1 - 2x)$

Waagerechte Tangente: Tangentensteigung muss 0 sein:

$0 = e^{-2x} \cdot (1 - 2x)$

Der Term ist ein Produkt bei dem der erste Faktor (eine Exponentialfunktion) niemals Null wird, also gilt:

$1 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

Zu dieser x-Koordinate wird noch die y-Koordinate benötigt:

$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot e^{-2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} e^{-1} \frac{1}{2e} \approx 0,18$

$P\left(\frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2e}\right)$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \underbrace{x}_{\to -\infty} \cdot \underbrace{e^{-2x}}_{\to +\infty} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \underbrace{x}_{\to +\infty} \cdot \underbrace{e^{-2x}}_{\to 0} = 0$ (e^x gewinnt gegenüber jeder Potenz von x)

3 $h: x \mapsto -ln(x) + 3$

a) Der Graph wird an der x-Achse gespiegelt und um 3 in positiver y-Richtung verschoben.

b) Steigung der Tangente:

$h'(x) = -\frac{1}{x} \Rightarrow m_T = h'(1) = -1$

$y = -x + t$

t-Bestimmung:

Durch Einsetzen eines Tangentenpunktes: $h(1) = -0 + 3 = 3$

$\Rightarrow 3 = -1 + t \Rightarrow t = 4$

Gleichung der Tangente: $y = -x + 4$

4 a) Eine Integralfunktion repräsentiert den gerichteten Flächeninhalt zwischen Graph und x-Achse. Jede Integralfunktion besitzt als Parameter die untere Integrationsgrenze. Wird diese in die Integralfunktion eingesetzt, dann erhält man den Flächeninhalt zwischen der unteren Grenze und der unteren Grenze. Dieser ist in jedem Fall 0. Also besitzt jede Integralfunktion mindestens eine Nullstelle.

b) $f(x) = 2x \Rightarrow F(x) = [t^2]_{-1}^{x} = x^2 - 1$ hat als Nullstellen +1 und −1.

Te2l 2 1 a) Durch Einsetzen verschiedener Informationen ergeben sich mehrer Gleichungen, mit denen sich a, b und c der quadratischen Funktion bestimmen lassen.

$p(x) = ax^2 + bx + c$

$A \in G_f : 0 = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c \Rightarrow (I) \qquad 0 = 4a - 2b + c$

$B \in G_f : 0 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \Rightarrow (II) \qquad 0 = 4a + 2b + c$

$C \in G_f : 5 = c\text{einsetzen} \rightarrow (I), (II)$

Zwei Gleichungen, zwei Unbekannte:

$0 = 4a - 2b + 5$ (I')

$0 = 4a + 2b + 5$ (II')

$I' + II' \qquad 8a = -10 \Rightarrow a = -1,25$

in (I')

$0 = 4 \cdot (-1,25) - 2b + 5 \Rightarrow b = 0$

$\Rightarrow p(x) = -1,25x^2 + 5 \checkmark$

b) $q(x) = -0,11x^4 - 0,81x^2 + 5$

$q(-x) = -0,11(-x)^4 - 0,81(-x)^2 + 5 = q(x)$

Der Graph G_q ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

$A \in G_q : 0 = -0,11 \cdot (-2)^4 - 0,81 \cdot (-2)^2 + 5$

$= -0,11 \cdot 16 - 0,81 \cdot 4 + 5 = -1,76 - 3,24 + 5$ OK!

B liegt achsensymmetrisch zu A, G_q ist ebenfalls achsensymmetrisch, also liegt auch B auf G_q.

Untersuchung der Extrempunkte:

$q'(x) = -0,44x^3 - 1,62x = 0$ für $-x(0,44x^2 + 1,62) = 0$

$x_1 = 0$ oder $0,44x^2 = -1,62 < 0$ keine zusätzliche Lösung!

P(0|5) ist der einzige Punkt mit $q'(x) = 0$.

$q''(x) = -1,32x^2 - 1,62 < 0 \Rightarrow$ <u>P ist Maximum</u>.

c) $q(-1) = -0,11 - 0,81 + 5 = 4,08 > 4$

Damit muss der durchgezogene Graph q(x) entsprechen.

d) $q(x) - p(x) = -0,11x^4 - 0,81x^2 + 5 - (-1,25x^2 + 5) = -0,11x^4 + 0,44x^2 = d(x)$

$d'(x) = -0,44x^3 + 0,88x = 0,44x(-x^2 + 2) = 0$

für $x_1 = 0$ oder $x^2 = 2 \Rightarrow x_{2/3} = \pm\sqrt{2}$

$x = \sqrt{2}$ ist von diesen Werten der einzige, der im Intervall]0;2[liegt.

Wert der Differenz:

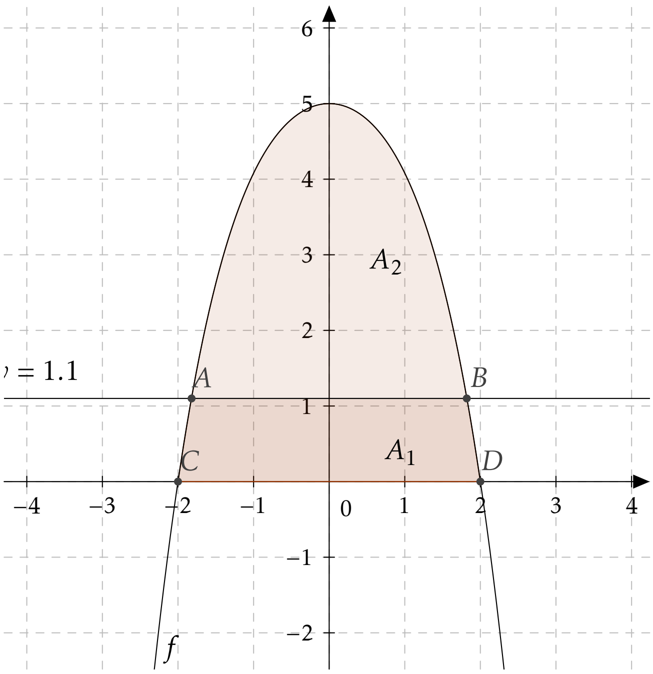
$d(\sqrt{2}) = -0,11 \cdot (\sqrt{2})^4 + 0,44 \cdot (\sqrt{2})^2 = 0,44$

e) $A = 2 \cdot \int_0^2 \left(-0,11x^4 - 0,81x^2 + 5\right) dx$

$= 2 \cdot \left[-0,11 \cdot \frac{x^5}{5} - 0,81 \cdot \frac{x^3}{3} + 5x\right]_0^2$

$= 2 \cdot \left[-0,11 \cdot \frac{32}{5} - 0,81 \cdot \frac{8}{3} + 10\right]_0^2$

$= 2 \cdot 7,136 = 14,272$



f)

Die Parallele zur x-Achse mit der Gleichung y=1,1 teilt die Fläche A aus e) in 2 Bereiche A_1 und A_2.

A_1 ist näherungsweise ein Trapez

Länge der unteren Seite: 4

Länge der oberen Seite: 2a (mit a Schnittstelle $y = 1,1$ und $q(x)$)

$1,1 = -0,11x^4 - 0,81x^2 + 5$

Die Höhe dieses Trapezes ist 1,1.

$\Rightarrow A_1 = (4 + 2a) \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,1$ (Flächeninhalt des Trapezes)

$A_2 = A - A_1$ (Restlicher Flächeninhalt)

$\frac{A_1}{A_2} = \frac{A_1}{A - A_1}$ (Verhältnis der Flächeninhalte)

2 a) Hochpunkt: Etwa vier Minuten nach dem Öffnen der Schleuse erreicht der Wasserdurchfluss an der Messstelle mit etwa 74 $\frac{m^3}{min}$ seinen größten Wert.
$WEP_1(\approx 2,5| \approx 50)$: Etwa 2,3 Minuten nach Öffnen der Schleuse steigt der Wasserdurchluss am stärksten an.
$WEP_2(\approx 6| \approx 54)$: Nach ungefähr 6 Minuten fällt der Wasserdurchfluss am stärksten ab.

b) Ein Kästchen der Kantenlänge 1cm entspricht $10m^3$. Durch Zählen der Kästchen erhält man:
$\int_1^4 f(t)dt \approx 143$

Zwischen der ersten und der vierten Minute fließen etwa $143m^3$ Wasser an der Beobachtungsstelle vorbei.

c)
- Intervall $[2;4]: \frac{f(4)-f(2)}{4-2} = \frac{74-35}{2} = 19,5$
- Intervall $[2;3]: \frac{f(3)-f(2)}{3-2} = \frac{64-35}{1} = 29$
- $\lim_{t \to 2} \frac{f(t)-f(2)}{t-2}$ beschreibt die Steigung der Tangente in P(2|f(2)), also die momentane Änderungsrate an der Beobachtungsstelle zur Zeit t = 2min.