

1 Abi 84 Lsg Geo I

1. a) Setze den Punkt mit der Parameterform der Geraden gleich:

$$\vec{A} = \vec{X}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$(I) 1 = -2 - 3\sigma$$

$$(II) 2 = 4 + 2\sigma$$

$$(III) 1 = 7 + 6\sigma$$

aus (III) folgt: $\sigma = -1$. Überprüfe diesen Wert in (I) und (II):

$$(I) 1 = -2 - 3 \cdot (-1) \text{ ok}$$

$$(II) 2 = 4 + 2 \cdot (-1) \text{ ok}$$

A liegt also auf der Geraden.

- b) Die Geraden sind parallel und nicht identisch wenn gilt:

- Der Vektor von B nach C muss linear abhängig vom Richtungsvektor von g sein:

$$\vec{C} - \vec{B} = \begin{pmatrix} 3 - 0 \\ -4 - (-2) \\ 4 - 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \vec{u} \text{ ok!}$$

- Ein Punkt der Gerade BC darf nicht auf g liegen.

$\vec{B} = \vec{X}$ muss einen Widerspruch ergeben:

$$(I) 0 = -2 - 3\sigma \Rightarrow \sigma = -\frac{2}{3} \text{ in (II)}$$

$$(II) -2 = 4 + 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \neq$$

Die Geraden sind also parallel und nicht identisch.

- c) Da die Richtungsvektoren der beiden Geraden parallel sind, lassen sie sich nicht beide als Richtungsvektoren für die Pafo der Ebene verwenden. Dafür verwendet man den Verbindungsvektor eines Punktes der Gerade g zu einem Punkt der Gerade h. Damit ergibt sich folgender Ansatz:

$$E : \vec{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \vec{AB}$$

$$E: \vec{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu' \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$E: \vec{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Jetzt wird der Normalenvektor benötigt:

$$\vec{n}' = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -42 \\ -21 \\ -14 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$6x_1 + 3x_2 + 2x_3 - n_0 = 0$$

Aufpunkt einsetzen:

$$6 \cdot (-2) + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 7 - n_0 = 0$$

$$-12 + 12 + 14 - n_0 = 0 \Rightarrow n_0 = 14$$

$$E: 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 14 = 0$$

d) Zur Abstandberechnung muss E noch in die HNF gebracht werden:

$$|\vec{n}| = \sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{49} = 7$$

$$\text{HNF}(E): \frac{6}{7}x_1 + \frac{3}{7}x_2 + \frac{2}{7}x_3 - 2$$

Ein Punkt von F ist durch seine Parameterform gekennzeichnet:

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} -2 + \lambda \\ -1 + 2\mu \\ -10 - 3\lambda - 3\mu \end{pmatrix} \text{ in die HNF}(E) \text{ einsetzen:}$$

$$d(E, P) = \frac{6}{7}(-2 + \lambda) + \frac{3}{7}(-1 + 2\mu) + \frac{2}{7}(-10 - 3\lambda - 3\mu) - 2$$

$$= -\frac{12}{7} + \frac{6}{7}\lambda - \frac{3}{7} + \frac{6}{7}\mu - \frac{20}{7} - \frac{6}{7}\lambda - \frac{6}{7}\mu - 2 = -5 - 2 = -7$$

Die Ebenen sind also parallel und haben den Abstand 7 LE. Punkte von F erreicht man, indem man zu Punkten von E einen negativen Normalenvektor addiert.

2. a) STANDARDWEG:

Aufpunkt: A. Richtungsvektor: \vec{n} :

$$k: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

in Kofo von F einsetzen um den Schnittpunkt zu erhalten.

Aus Teilaufgabe 1d ist bekannt, dass die Ebenen parallel sind (also den gleichen Normalenvektor besitzen). Für die KoFo von F muss also nur noch deren Aufpunkt in folgende Gleichung eingesetzt werden:

$$6x_1 + 3x_2 + 2x_3 - n_0 = 0$$

$$6 \cdot (-2) + 3 \cdot (-1) + 2 \cdot (-10) - n_0 = 0$$

$$-12 - 3 - 20 - n_0 = 0 \Rightarrow n_0 = -35$$

$$6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 35 = 0$$

Nun die Geradengleichung von k einsetzen:

$$6(1 + 6\tau) + 3(2 + 3\tau) + 2(1 + 2\tau) + 35 = 0$$

$$6 + 36\tau + 6 + 9\tau + 2 + 4\tau + 35 = 0$$

$$49 + 49\tau = 0 \Rightarrow \tau = -1$$

$$\vec{D} = \begin{pmatrix} 1 - 6 \\ 2 - 3 \\ 1 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

MIT KÖPFCHEN:

Die beiden parallelen Ebenen sind genau eine Länge des negativen Normalenvektors voneinander entfernt. Um also den Punkt D zu erhalten muss lediglich zum Ortsvektor von A ein negativer Normalenvektor addiert werden:

$$\vec{D} = \vec{A} + \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 - 6 \\ 2 - 3 \\ 1 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \vec{DA} = \vec{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{DC} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\cos(\psi) = \frac{\vec{DA} \circ \vec{DC}}{DA \cdot DC}$$

$$\cos(\psi) = \frac{48 - 9 + 10}{7 \cdot \sqrt{98}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \psi = 45$$

$$3. \quad h: \vec{B} + \gamma \vec{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = 0 \Rightarrow -2 - 2\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = -1$$

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Für die Teilung sind die jeweiligen γ zu betrachten:

$$B \rightarrow C: \gamma = 1$$

$$B \rightarrow T: \gamma = -1$$

B liegt also genau in der Mitte zwischen T und C