

1 Abi 12 Lsg Geo I

a) Parameterform von E (A Aufpunkt, Vektoren nach B und C als Richtungsvektoren):

$$E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda' \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu' \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$E: x_2 + 2x_3 - n_0 = 0$$

Aufpunkt einsetzen:

$$2 + 2 \cdot 3 - n_0 = 0 \Rightarrow n_0 = 8$$

$$E: x_2 + 2x_3 - 8 = 0$$

b) Zur Abstandsberechnung wird die Hesse-Normalform benötigt:

$$|\vec{n}| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$\text{HNF}(E): \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (x_2 + 2x_3 - 8)$$

Abstand von R durch Einsetzen von R:

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (0 + 2 \cdot 0 - 8) = \frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{8}{5} \sqrt{5}$$

c) G(2|4|2) ist (laut Angabe) der erste Eckpunkt des Fensters. Die Gerade GL muss parallel zur Geraden CD sein, sonst wäre GHKL kein Rechteck. CD verläuft in x_1 -Richtung, da sich beide Punkte nur in x_1 unterscheiden. Also verläuft GL ebenfalls parallel zu x_1 . Daraus ergeben sich für L (mit Abstand 1 von von G) die Koordinaten L(1|4|2) und für H und K, die mit ihren x_1 -Koordinaten jeweils G und L entsprechen aber auf CD liegen H(2|6|1) und K(1|6|1).

Für den Flächeninhalt benötigt man noch die Länge der längeren Rechteckseite, also:

$$|\vec{G} - \vec{H}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{5}$$

$$A_{\text{Rechteck}} = 1m \cdot \sqrt{5}m = \sqrt{5}m^2$$

d) • Die Seitenwand OPQR entspricht der x_1x_3 -Ebene.

- Die Gerade wird durch den Aufpunkt G und den angegebenen Richtungsvektor beschrieben:

$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Für den Spurpunkt muss die x_2 -Koordinate 0 sein: $0 = 4 - 8\sigma \Rightarrow \sigma = 0,5$

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + 0,5 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1,5 \end{pmatrix}$$

Zur Winkelberechnung nimmt man den Normalenvektor \vec{e}_2 auf OPQR $\sin(\psi) = \frac{\vec{e}_2 \circ \vec{v}}{e_2 \cdot v}$ mit $e_2 = 1$ und $v = \sqrt{69}$.

$$\sin(\psi) = \frac{-8}{\sqrt{69}} \approx -0,96 \Rightarrow \psi = -74,4$$

- e) Der Mittelpunkt der Strecke GH berechnet sich über das arithmetische Mittel der Ortsvektoren:

$$\vec{M} = \frac{1}{2}(\vec{G} + \vec{H}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1,5 \end{pmatrix} \text{ Die Achse befindet sich also auf einer Höhe von 1,5m über}$$

dem Boden (x_3 -Koordinate). Um den Boden zu berühren müsste die Hälfte der Fensterlänge also 1,5m betragen:

$$\frac{l}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} = 1,12 < 1,5$$

Das Fenster kann den Boden nicht berühren.

- f) Durch Abmessen ergibt sich, dass die Höhe etwa 6,5 mal in die Breite hineinpasst. Also gilt:

$$b = 6,5 \cdot 0,4m \approx 2,6m$$

Gesucht ist weiterhin der Abstand der Geraden k von der Wand unter dem Fenster, also von der zu x_1x_3 -parallelen Ebene, die durch C und D geht. Da beide Objekte parallel zu x_1 verlaufen, lässt sich der Abstand aus dem Unterschied der x_2 -Komponenten ablesen: $d = 6 - 5,5 = 0,5$

Nun muss der Abstand der Fensterdrehachse von der dazu parallelen Geraden k ausgerechnet werden. Da die Geraden parallel sind, reicht es den Abstand des Punktes M von k zu bestimmen. Der Fußpunkt von M muss den gleichen x_1 -Wert besitzen wie M, da die Geraden ja parallel sind.

$$\Rightarrow \vec{F} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5,5 \\ 0,4 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{M} - \vec{F}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1,5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5,5 \\ 0,4 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -0,5 \\ 1,1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-0,5)^2 + 1,1^2} = \sqrt{1,46}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{5} \approx 1,12; \sqrt{1,46} \approx 1,21 > 1,12 = \frac{l}{2}$$

Das Fenster stößt nicht an.