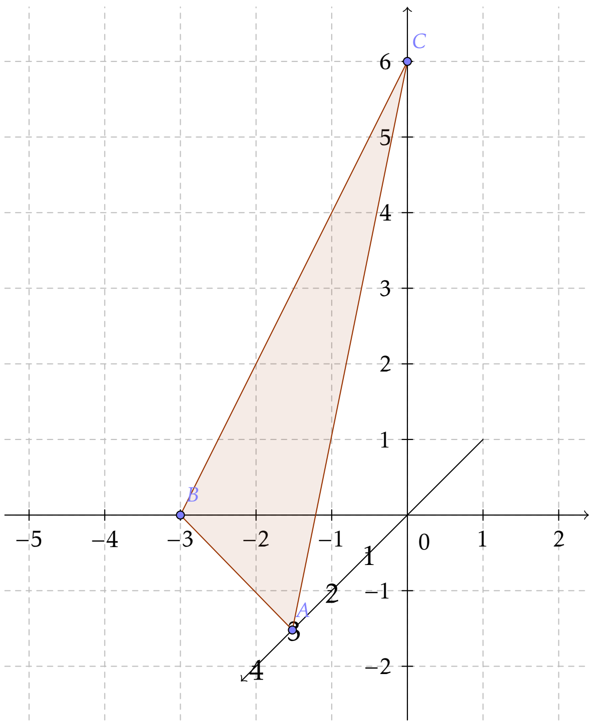
Abi 98 Lsg Geo II

1. a) Setze die Ebene E in Parameterform zusammen aus:
   - Dem Aufpunkt z.B. von g
   - dem Richtungsvektor von g
   - dem Richtungsvektor von h
   - daraus ergibt sich folgende Definition der Ebene E in Parameterform:
     $E : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

   Gesucht ist nun die Koordinatenform der Ebene E.
   Ermittle dazu den Normalenvektor der Ebene mit Hilfe des Kreuzproduktes aus den beiden Richtungsvektoren.
   $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ woraus sich folgende Koordinatenform ergibt:
   $E : -2x_1 + 2x_2 - x_3 - n_0 = 0$
   n_0 lässt sich durch Einsetzen des Aufpunktes bestimmen, denn der Aufpunkt muss in der Ebene enthalten sein und das Einsetzen seiner Koordinaten daher zu einer wahren Aussage führen:
   $-2 \cdot (-2) + 2 \cdot (-4) - 1 \cdot 2 - n_0 = 0$
   $4 - 8 - 2 - n_0 = 0 \Rightarrow n_0 = -6$
   Eine mögliche Koordinatenform für E lautet also:
   $E : -2x_1 + 2x_2 - x_3 + 6 = 0$
   noch mit (-1) durchmultiplizieren:
   $E : 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 6 = 0$ ergibt das Kontrollergebnis zum Weiterrechnen. $\surd$

   b) Punkt A: setze $x_2 = x_3 = 0$. Dann entsteht folgende Gleichung:
   $2x_1 - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 3.$
   A(3|0|0)
   Punkt B: setze $x_1 = x_3 = 0$. Dann entsteht folgende Gleichung:
   $-2x_2 - 6 = 0 \Rightarrow x_2 = -3.$
   B(0|-3|0)
   Punkt C: setze $x_1 = x_2 = 0$. Dann entsteht folgende Gleichung:
   $x_3 - 6 = 0 \Rightarrow x_3 = 6.$
   C(0|0|6)
   Grafik:



c) Setze Pafo von E in KoFo von H:
$1 \cdot (-2+\lambda) + 1 \cdot (-4+2\lambda-\mu) = 0$ zusammenfassen:
$-2+\lambda-4+2\lambda-\mu = 0$
$-6+3\lambda-\mu = 0 \Rightarrow \mu = 3\lambda - 6$
Ersetze also μ in PaFo von E:

$$k: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + (3\lambda - 6) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ entspricht dem dargestellten Zwischenergebnis, wenn man dem Aufpunkt zweimal den Richtungsvektor hinzufügt:

$$k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \surd$$

d) Wie schon aus der Grafik zu entnehmen, liegt die Basis des gleichschenkligen Dreiecks in der x_1x_2-Ebene. Die Strecken [AC] und [BC] müssen also gleichlang sein.

$$\overline{AC} = |\vec{C} - \vec{A}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{6^2 + 0^2 + (-3)^2} = \sqrt{45}$$

$\overline{BC} = |\vec{C} - \vec{B}| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{6^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{4}5 = \overline{AC}\surd$

Das Dreieck ist also gleichschenklig.

Der Fußpunkt des Lotes von C auf die Strecke [AB] muss also genau in der Mitte liegen:

$\vec{F} = \frac{1}{2}\left(\vec{A} + \vec{B}\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1,5 \\ -1,5 \\ 0 \end{pmatrix}$

Nun ist noch zu begründen, dass [CF] auf k liegt:

C liegt auf k, da C Aufpunkt der Geradengleichung

F muss überprüft werden:

$\vec{F} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ -1,5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$

Diese Gleichung ist wahr, wenn $\tau = 1,5$.

Wenn F und C auf k liegen, dann liegt deren Verbindungsstrecke ebenfalls auf k. $\surd$

e) Benötigt werden jeweils Vektoren der beiden Richtungen:

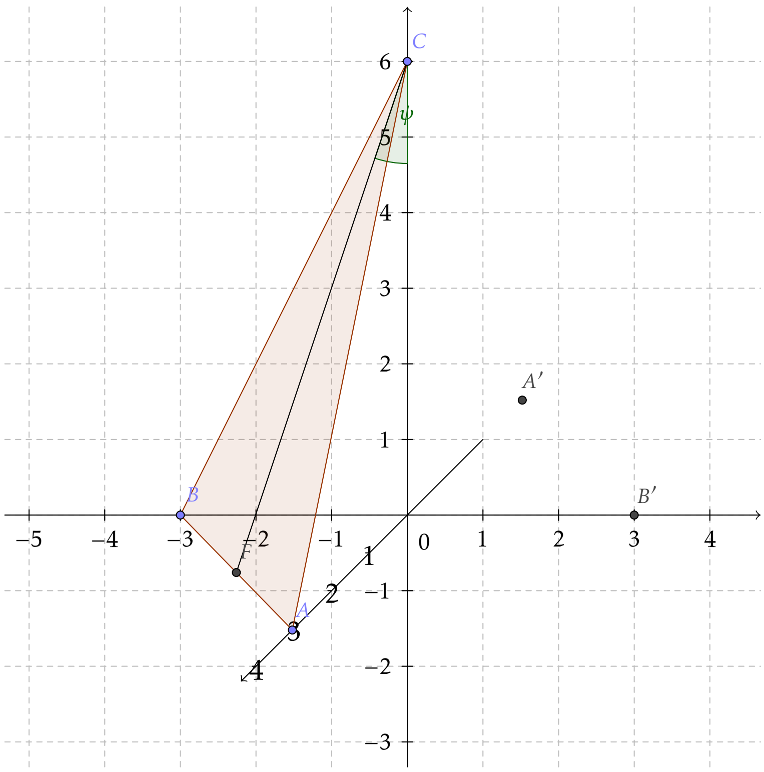
$\vec{x_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$

Der Kosinus des Zwischenwinkels lässt sich mit Hilfe des Skalarproduktes berechnen:

$cos(\psi) = \frac{\vec{x_3} \circ \vec{u}}{x_3 \cdot u} = \frac{-4}{\sqrt{18}} = 0.94 \Rightarrow \psi = 19,47$

Grafik:



f) Rauminhalt der Pyramide:
$V = \frac{1}{3}G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 6 = 2 \cdot 18 = 36$

2. a) Zur Abstandsbestimmung sollte die Hesse-Normalform der Ebene bestimmt werden:
$\left|\vec{n}\right| = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$
daraus ergibt sich die HNF:
$HNF(E): \frac{2}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 - 2$
Nun wird P eingesetzt:
$d(P,E) = \left|0 - 0 + \frac{1}{3} \cdot p - 2\right| = \left|\frac{1}{3} \cdot p - 2\right|$
Ergibt sich als Abstand in Abhängigkeit von p

b) Der Abstand von P zur Ebene E soll genauso groß sein, wie der Abstand von P zur x_1x_2-Ebene.

- $d(E,P) = \left|\frac{1}{3} \cdot p - 2\right|$ aus der oben berechneten Hesse-Normalform von E.
- Den Abstand zur x_1x_2-Ebene erhält man aus der x_3-Komponente, die für P(0|0|p) genau $|p|$ entspricht.

Daraus ergibt sich die Gleichung:
$|p| = \left|\frac{1}{3} \cdot p - 2\right|$
Es ergeben sich 4 Fälle, die sich auf zwei reduzieren lassen:

- $p = \frac{1}{3} \cdot p - 2$ (I) oder

- $-p = \frac{1}{3} \cdot p - 2$ (II)

Aus (I) ergibt sich $p = -3$ aus (II) $p = 1,5$ die zwei gesuchten Punkte sind also: $P_1(0|0|1,5); P_2(0|0|-3)$

c) Der gefundene Punkt P_1 eignet sich als Mittelpunkt der einbeschriebenen Kugel, da er von den Seitenflächen der Pyramide den gleichen Abstand hat, wie von der Grundfläche. Der Radius der Kugel muss dann 1,5 betragen, damit sie sowohl E als auch die x_1x_2-Ebene als Tangentialebenen besitzt. Die Gleichung der Kugel muss also lauten:
$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - 1,5)^2} = 1,5$