Abi 24 Lsg Ana I

A 1 $f(x) = 8x^3 + 3x$

$f'(x) = 24x^2 + 3$

b) $F(x) = 2x^4 + 1,5x^2 + C$

$5 = 2 \cdot (-1)^4 + 1,5 \cdot (-1)^2 + C$

$5 = 2 + 1,5 + C \Leftrightarrow C = 1,5$

2 a) Der Wert des Integrals ist positiv, da positiv orientierte Flächeninhalte überwiegen. Während der oberhalb der x-Achse liegende Bereich eine halbe Periode einschließt, tut das der unterhalb liegende nicht ganz.

b) Steigung der Tangente im Koordinatenursprung:

$g'(x) = cos(\frac{1}{2}x)$ mit $g'(0) = 1$

Die Tangente hat also Steigung 1 und geht durch den Ursprung, also lautet die Funktionsgleichung:

$t(x) = x$ mit $t(-1) = -1$✓ und $t(+1) = +1$✓

3 a) $f_a(x) = \underbrace{x}_{<0} \cdot \underbrace{e^{ax}}_{>0} < 0$ für negative x.

b) Für positive a gilt $\lim\limits_{x \to +\infty} \underbrace{x}_{to+\infty} \cdot \underbrace{e^{ax}}_{\to +\infty} = +\infty$

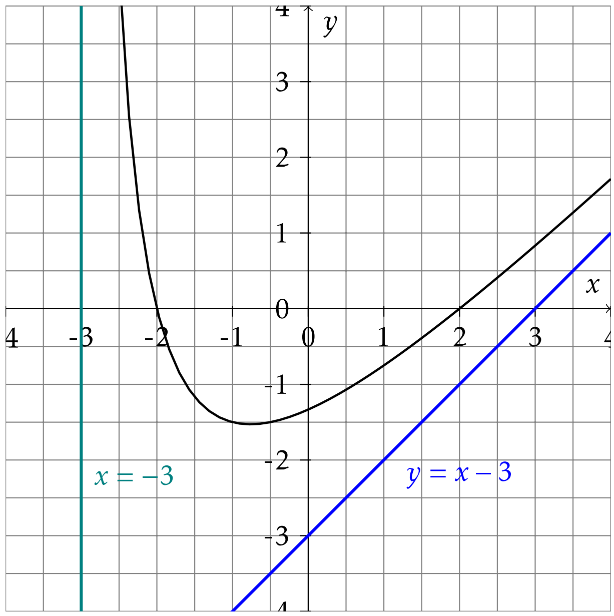
Daher kommt nur Graph II in Frage.

4 a) $\underbrace{3sin(x)}_{\text{zwischen -3 und +3}} \quad +1$

b) $h(x)$ muss also in $[-2;4]$ nicht negativ und definiert sein. Dies lässt sich am einfachsten durch eine Parabel erreichen, die nach unten geöffnet und im Intervall von -2 bis +4 nicht negativ ist:

$h(x) = -(x+2) \cdot (x-4)$

B 1 a) Abbildung:



$x = -3$ senkrechte Asymptote, $y = x - 3$ schräge Asymptote.

Schnittpunkt: $x = -3 \land y = x - 3 \Leftrightarrow y = -3 - 3 = -6$

Die Geraden treffen sich in $(-3|-6)$

b) $f(0) = 0 - 3 + \frac{5}{0+3} = -\frac{9}{3} + \frac{5}{3} = -\frac{4}{3} \approx -1,33$

$$f(x) = \underbrace{x - 3}_{\text{Funktionswerte der Geraden}} + \underbrace{\frac{5}{x+3}}_{>0 \text{ für } x>-3} > x - 3$$

Da zu den Funktionswerten der Geraden noch etwas positives hinzuaddiert wird, liegt der Graph oberhalb.

c) $\frac{(x-3)\cdot(x+3)}{x+3} + \frac{5}{x+3} = \frac{(x^2-9)+5}{x+3} = \frac{x^2-4}{x+3} \checkmark$

$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)\cdot(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \lor x = +2 \checkmark$

d) $f(x) = x - 3 + 5 \cdot (x+3)^{-1}$

$f'(x) = 1 - 5 \cdot (x+3)^{-2} = \frac{(x+3)^2}{(x+3)^2} - \frac{5}{(x+3)^2} = \frac{(x+3)^2-5}{(x+3)^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+3)^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow (x+3)^2 = 5 \Leftrightarrow x+3 = \pm\sqrt{5}$

$\Leftrightarrow x_1 = -3 - \sqrt{5} \vee x_2 = -3 + \sqrt{5}$

Nur x_2 liegt rechts von -3, also $x_T = -3 + \sqrt{5}$

e) Gesucht ist der Flächeninhalt zwischen dem Graphen G und der x-Achse für die dargestellten negativen Funktionswerte.

Durch Abschätzen der Fläche ergibt sich ein Wert von etwa 16 Kästchen:

$\int\limits_{-2}^{2} f(x)dx \approx -4.$

f) Zeige, dass F(x) Stammfunktion: $F'(x) = x - 3 + \frac{5}{x+3} \cdot 1 \checkmark$

$\lim\limits_{x\to -3} F(x) = \lim\limits_{x\to -3} \underbrace{\frac{1}{2}(-3)^2 - 3 \cdot (-3)}_{\to 13{,}5} + 5 \cdot \underbrace{ln(x+3)}_{\to -3} = -\infty$

Da alle Stammfunktionen $F_C(x)$ sich nur durch Verschiebung entlang der y-Achse unterscheiden, gilt auch für alle Stammfunktionen:

$\lim\limits_{x\to -3} F_C(x) = -\infty.$

Da $J(x)$ als Integralfunktion auch eine Stammfunktion ist gilt also auch $\lim\limits_{x\to -3} J(x) = -\infty$.

Dies bedeutet, dass der von Graph G und x-Achse eingeschlossene Flächeninhalt, ausgehend von -2 über jede Grenze wächst, je näher man an $x = -3$ heran geht.

g) Eine Nullstelle erhält man durch Einsetzen der unteren Grenze $x = -2$. Ein weitere ergibt sich, für $x > 2$, wenn der negativ orientierte Flächeninhalt im Intervall $]-2;+2[$ vom positiv orientierten Flächeninhalt jenseits $x = 2$ ausgeglichen wird.

2 Funktionsterm: $f_k(x) = \frac{x^2-k}{x+3}$

a) Nullstellen ergeben sich durch die Nullstellen des Zählers:
$x^2 - k = 0$ mit der Diskriminante $D = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-k) = 4k$

1. Fall: $D < 0 \Leftrightarrow k < 0$, keine Lösungen.

2. Fall: $D = 0 \Leftrightarrow k = 0$, ein Lösung.

3. Fall: $D > 0 \Leftrightarrow k > 0$, zwei Lösungen.

$f_0(x) = \frac{x^2-0}{x+3} > 0$ für $x > -3$, also kein Vorzeichenwechsel an der Nullstelle $x = 0$.

b) $x^2 + 6x + k = 0$ mit der Diskriminante $D = 36 - 4 \cdot 1 \cdot k = 36 - 4k$

Keine Lösung, wenn $D < 0 \Leftrightarrow 36 - 4k < 0 \Leftrightarrow 36 < 4k \Leftrightarrow 9 < k$

c) Steigung der Tangente bei $x = 0$: $f'(0) = \frac{0+0+k}{(0+3)^2} = \frac{k}{9}$ ✓

Orthogonale Geraden: $m_2 = -\frac{1}{m1}$ also gesucht die Gerade mit der Steigung $m_2 = -\frac{1}{1} = -1$

Ansatz: $\frac{k}{9} = -1 \Leftrightarrow k = -9$

d) $f(0) = -\frac{k}{3}$

$t_k : y = -\frac{k}{9} \cdot x - \frac{k}{3}$