

## Abi 24 Lsg Ana I

A 1  $f(x) = 8x^3 + 3x$

$$f'(x) = 24x^2 + 3$$

b)  $F(x) = 2x^4 + 1,5x^2 + C$

$$5 = 2 \cdot (-1)^4 + 1,5 \cdot (-1)^2 + C$$

$$5 = 2 + 1,5 + C \Leftrightarrow C = 1,5$$

2 a) Der Wert des Integrals ist positiv, da positiv orientierte Flächeninhalte überwiegen. Während der oberhalb der x-Achse liegende Bereich eine halbe Periode einschließt, tut das der unterhalb liegende nicht ganz.

b) Steigung der Tangente im Koordinatenursprung:

$$g'(x) = \cos\left(\frac{1}{2}x\right) \text{ mit } g'(0) = 1$$

Die Tangente hat also Steigung 1 und geht durch den Ursprung, also lautet die Funktionsgleichung:

$$t(x) = x \text{ mit } t(-1) = -1 \checkmark \text{ und } t(+1) = +1 \checkmark$$

3 a)  $f_a(x) = \underbrace{x}_{<0} \cdot \underbrace{e^{ax}}_{>0} < 0$  für negative x.

b) Für positive a gilt  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{x}_{\rightarrow +\infty} \cdot \underbrace{e^{ax}}_{\rightarrow +\infty} = +\infty$

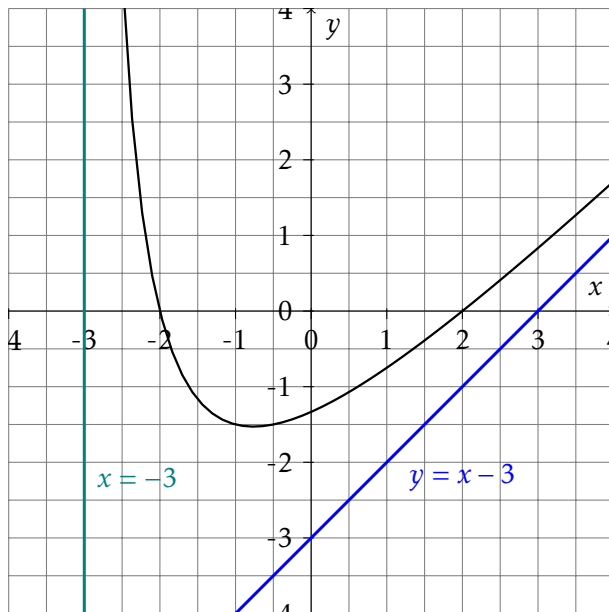
Daher kommt nur Graph II in Frage.

4 a)  $\underbrace{3\sin(x)}_{\text{zwischen } -3 \text{ und } +3} + 1$

b)  $h(x)$  muss also in  $[-2; 4]$  nicht negativ und definiert sein. Dies lässt sich am einfachsten durch eine Parabel erreichen, die nach unten geöffnet und im Intervall von -2 bis +4 nicht negativ ist:

$$h(x) = -(x + 2) \cdot (x - 4)$$

B 1 a) Abbildung:



$x = -3$  senkrechte Asymptote,  $y = x - 3$  schiefe Asymptote.

Schnittpunkt:  $x = -3 \wedge y = x - 3 \Leftrightarrow y = -3 - 3 = -6$

Die Geraden treffen sich in  $(-3 | -6)$

b)  $f(0) = 0 - 3 + \frac{5}{0+3} = -\frac{9}{3} + \frac{5}{3} = -\frac{4}{3} \approx -1,33$

$$f(x) = \underbrace{x - 3}_{\text{Funktionswerte der Geraden}} + \underbrace{\frac{5}{x+3}}_{>0 \text{ f\"ur } x > -3} > x - 3$$

Da zu den Funktionswerten der Geraden noch etwas positives hinzuaddiert wird, liegt der Graph oberhalb.

c)  $\frac{(x-3) \cdot (x+3)}{x+3} + \frac{5}{x+3} = \frac{(x^2-9)+5}{x+3} = \frac{x^2-4}{x+3} \checkmark$

$$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2) \cdot (x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = +2 \checkmark$$

d)  $f(x) = x - 3 + 5 \cdot (x + 3)^{-1}$

$$f'(x) = 1 - 5 \cdot (x+3)^{-2} = \frac{(x+3)^2}{(x+3)^2} - \frac{5}{(x+3)^2} = \frac{(x+3)^2 - 5}{(x+3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+3)^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow (x+3)^2 = 5 \Leftrightarrow x+3 = \pm\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = -3 - \sqrt{5} \vee x_2 = -3 + \sqrt{5}$$

Nur  $x_2$  liegt rechts von  $-3$ , also  $x_T = -3 + \sqrt{5}$

- e) Gesucht ist der Flächeninhalt zwischen dem Graphen G und der x-Achse für die dargestellten negativen Funktionswerte.

Durch Abschätzen der Fläche ergibt sich ein Wert von etwa 16 Kästchen:

$$\int_{-2}^2 f(x) dx \approx -4.$$

- f) Zeige, dass F(x) Stammfunktion:  $F'(x) = x - 3 + \frac{5}{x+3} \cdot 1 \checkmark$

$$\lim_{x \rightarrow -3} F(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \underbrace{\frac{1}{2}(-3)^2 - 3 \cdot (-3) + 5 \cdot \ln(x+3)}_{\rightarrow 13,5} = -\infty$$

Da alle Stammfunktionen  $F_C(x)$  sich nur durch Verschiebung entlang der y-Achse unterscheiden, gilt auch für alle Stammfunktionen:

$$\lim_{x \rightarrow -3} F_C(x) = -\infty.$$

Da  $J(x)$  als Integralfunktion auch eine Stammfunktion ist gilt also auch  $\lim_{x \rightarrow -3} J(x) = -\infty$ .

Dies bedeutet, dass der von Graph G und x-Achse eingeschlossene Flächeninhalt, ausgehend von  $-2$  über jede Grenze wächst, je näher man an  $x = -3$  heran geht.

- g) Eine Nullstelle erhält man durch Einsetzen der unteren Grenze  $x = -2$ . Ein weitere ergibt sich, für  $x > 2$ , wenn der negativ orientierte Flächeninhalt im Intervall  $]-2; +2[$  vom positiv orientierten Flächeninhalt jenseits  $x = 2$  ausgeglichen wird.

2 Funktionsterm:  $f_k(x) = \frac{x^2 - k}{x+3}$

- a) Nullstellen ergeben sich durch die Nullstellen des Zählers:  
 $x^2 - k = 0$  mit der Diskriminante  $D = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-k) = 4k$

1. Fall:  $D < 0 \Leftrightarrow k < 0$ , keine Lösungen.

2. Fall:  $D = 0 \Leftrightarrow k = 0$ , ein Lösung.

3. Fall:  $D > 0 \Leftrightarrow k > 0$ , zwei Lösungen.

$f_0(x) = \frac{x^2-0}{x+3} > 0$  für  $x > -3$ , also kein Vorzeichenwechsel an der Nullstelle  $x = 0$ .

b)  $x^2 + 6x + k = 0$  mit der Diskriminante  $D = 36 - 4 \cdot 1 \cdot k = 36 - 4k$

Keine Lösung, wenn  $D < 0 \Leftrightarrow 36 - 4k < 0 \Leftrightarrow 36 < 4k \Leftrightarrow 9 < k$

c) Steigung der Tangente bei  $x = 0$ :  $f'(0) = \frac{0+0+k}{(0+3)^2} = \frac{k}{9} \checkmark$

Orthogonale Geraden:  $m_2 = -\frac{1}{m_1}$  also gesucht die Gerade mit der Steigung  
 $m_2 = -\frac{1}{\frac{k}{9}} = -1$

Ansatz:  $\frac{k}{9} = -1 \Leftrightarrow k = -9$

d)  $f(0) = -\frac{k}{3}$

$t_k : y = -\frac{k}{9} \cdot x - \frac{k}{3}$