Abi 22 Lsg Geo I

A a) Für jeden Punkt auf der Kugel muss gelten, dass sein Abstand zum Mittelpunkt $2\sqrt{6}$ beträgt:

$\vec{X} - \vec{M} = 2\sqrt{6} \Leftrightarrow \sqrt{(x_1-3)^2 + (x_2+6)^2 + (x_3-5)^2} = 2\sqrt{6}$

$\Leftrightarrow (x_1-3)^2 + (x_2+6)^2 + (x_3-5)^2 = 24$

Test mit P(5|-4|1): $(5-3)^2 + (-4+6)^2 + (1-5)^2 = 2^2 + 2^2 + 4^2 = 4+4+16 = 24\checkmark$

b) Gibt es Punkte auf K, deren x_3-Koordinate Null ist?

$(x_1-3)^2 + (x_2+6)^2 + (0-5)^2 = \underbrace{(x_1-3)^2}_{\geq 0} + \underbrace{(x_2+6)^2}_{\geq 0} + 25 > 24,$

solche Punkte kann es also nicht geben.

B $P(4|5|-19)$ $Q(5|9|-18)$ $R(3|7|-17)$ $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -12+\lambda \\ 11+2\lambda \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\left|\vec{PQ}\right| = \left|\vec{Q}-\vec{P}\right| = \left\|\begin{pmatrix} 5-4 \\ 9-5 \\ -18-(-19) \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{1^2+4^2+1^2} = 3\sqrt{2}$$

Rechter Winkel bei R:

$$\vec{RQ} \circ \vec{RP} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2-4+2 = 0\checkmark$$

Die an R angrenzenden Seiten stehen aufeinander senkrecht.

Deshalb liegt R auf einem Thaleskreis über der Strecke $\bar{PQ}$.

b) Bilde das Kreuzprodukt aus $\vec{RQ}$ und $\vec{RP}$ um den Normalenvektor für E zu erhalten:

$$\vec{RQ} \times \vec{RP} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = -3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -3 \cdot \vec{n}_E$$

$E: 2x_1 - x_2 + 2x_3 + c = 0$

R befindet sich in der Ebene:

$2 \cdot 4 - 5 + 2 \cdot (-19) + c = 0$

$8 - 5 - 38 + c = 0 \Leftrightarrow c = 35$

Ebenengleichung: $2x_1 - x_2 + 2x_3 + 35 = 0\checkmark$

Setze g in E: $2 \cdot (-12+\lambda) - (11+2\lambda) + 0 + 35 = 0$

$-24 + 2\lambda - 11 - 2\lambda + 35 = 0$

$-35 + 35 - 2\lambda + 2\lambda = 0\checkmark$, g ist in E enthalten.

c) Da sowohl der Aufpunkt als auch der Richtungsvektor 0 für die x_3-Komponente sind, kann kein Punkt der Geraden außerhalb der x_1x_2-Ebene liegen.

d) $cos(\varphi) = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{3 \cdot \sqrt{2} \cdot 1} = \frac{2}{3\sqrt{2}} \approx 0,47$

$\Rightarrow \varphi = 61,9^o$

e) Gesucht ist der Abstand der Geraden g(Uferlinie) vom Ursprung(Boje). Ansatz:

$\vec{u} \circ \left(\vec{X} - \vec{O}\right) = \vec{u} \circ \vec{X} = 0$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -12 + \lambda \\ 11 + 2\lambda \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -12 + \lambda + 22 + 4\lambda = 0$

$10 + 5\lambda = 0$

$\lambda = -2$

Fußpunkt F: $\vec{F} = \begin{pmatrix} -14 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $d = \left|\vec{F} - vecO\right| = \left|\vec{F}\right| = \sqrt{14^2 + 7^2 + 0^2} = 7\sqrt{5} \approx 15,7$

f) K befindet sich senkrecht unter O. O ist der Ursprung des KoSy. Also taucht der Fotograf entlang der negativen x_3-Achse ab. Zur Abstandsbestimmung von E muss E noch in die Hesse-Normal-Form gebracht werden:

$\left|\vec{n}_E\right| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3$

Hesse-Normalform der Ebene: $\frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 + \frac{35}{3}$

Nun wird die x_3-Achse ($x_1 = x_2 = 0$) eingesetzt und das Ganze mit dem Abstand 3 gleichgesetzt:

$\frac{2}{3} \cdot 0 - \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{2}{3}x_3 + \frac{35}{3} = 3$

$\frac{2}{3}x_3 + \frac{35}{3} = 3$

$2x_3 + 35 = 9 \Leftrightarrow x_3 = -13$

Der Taucher befindet sich also in 13m Tiefe.

g) Nachdem der Fotograf im Abstand 3m vom Meeresboden taucht, hat sein Kegel den Durchmesser 6m (Projektion ist ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck mit Höhe 3m und Grundlinie 6m).

Wenn also der Umkreis der 3 schönen Korallenpunkte einen kleineren Durchmesser hat, dann gehen alle Korallen auf das Foto.

Wie in Teilaufgabe a) gezeigt befindet sich R auf dem Thaleskreis über der Seite PQ, somit ist $\left|\vec{PQ}\right|$ der Durchmesser des Umkreises:

$d_U = 3\sqrt{2} \approx 3 \cdot 1,4 = 4,2 < 6.$ Der Durchmesser des Umkreises der Korallen ist also kleiner als der Durchmesser des von der Kamera erfassten Kreises; die Szene also aus der genannten Entfernung problemlos fotografierbar.