Abi 23 Lsg Geo I

A a) Allgmeiner Geradenpunkt: $\vec{X} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1-\lambda \end{pmatrix}$ in E einsetzen:

$\lambda + 1 + 1 - \lambda = 2$

$2 = 2$

Diese Aussage ist für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ erfüllt, also liegt die Gerade g in E.

b) Zwei Geraden sind windschief, wenn sie keinen gemeinsamen Punkt haben und wenn sie nicht parallel sind.

- Untersuchung der Parallelität:

  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}.$

  Für die x_3-Komponente muss gelten:

  $-1 = k \cdot 0 = 0$ Widerspruch. Unabhängig von a gibt es kein k das die Gleichung erfüllt, also sind die Richtungsvektoren linear unabhängig.

  Die Geraden sind also für kein a parallel oder identisch.

- Untersuchung auf einen gemeinsamen Punkt:

  $\begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mu \cdot a \\ 1 \end{pmatrix}$

  Für eine übereinstimmende x_1-Koordinate muss $\lambda = 1$ sein, für eine übereinstimmende x_3-Komponente muss $\lambda = 0$ sein. Das schließt sich aus, daher können sich die Geraden nicht treffen.

Die Geraden sind windschief.

B a) $\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} -19 \\ 19 \\ 0 \end{pmatrix} = 19 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{EF} = \vec{F} - \vec{E} = \begin{pmatrix} -12 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} = 12 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Die Seiten $\bar{AB}$ und $\bar{EF}$ sind also parallel.

$\left|\vec{AE}\right| = \sqrt{(12-19)^2 + (0-0)^2 + (7-0)^2} = 7 \cdot \sqrt{2}$

$\left|\vec{BF}\right| = \sqrt{(0-0)^2 + (12-19)^2 + (7-0)^2} = 7 \cdot \sqrt{2}$

$\bar{AE}$ und $\bar{BF}$ sind gleichlang.

b) $\vec{n} = \vec{AB}' \times \vec{AE}' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$L : x_1 + x_2 + x_3 + c = 0$

A ist drin: $19 + 0 + 0 + c = 0 \Rightarrow c = 19$

Koordinatenform: $x_1 + x_2 + x_3 - 19 = 0\checkmark$

Winkel den die Ebene L mit der x_1x_2-Ebene enschließt:

$$cos(\varphi) = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{3} \cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\Rightarrow \varphi \approx 55^o$

c) Verlängere die Strecke AE über E hinaus, bis sie auf die x_3-Achse trifft:

$AE : \vec{X} = \vec{A} + \lambda \vec{AE} = \begin{pmatrix} 19 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$

Wähle λ so, dass $x_1 = x_2 = 0$

$19 - 7\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{19}{7}$

Wenn $\lambda = \frac{19}{7}$, dann ist die x_1-Koordinate 0. Die x_2-Koordinate ist für jeden Geradenpunkt 0. Also muss für $\lambda = \frac{19}{7}$ die x_3-Koordinate berechnet werden, dann ist die Höhe der Pyramidenspitze berechnet:

$x_3 = 0 + \frac{19}{7} \cdot 7 = 19\checkmark$.

d) Für einen exakten 45^o-Winkel müsste das entsprechende Dreieck aus Basislinie $\overline{MN}$ und Höhe $\overline{MS_{15}}$ gleichschenklig sein, also die Entfernung $\overline{MS_{15}} = \overline{MN}$. Ist jedoch die Höhenlänge $\overline{MS_{15}}$ geringer als die der Basislinie $\overline{MN}$, so muss der eingeschlossene Winkel auch kleiner als 45^o sein.

e) Der Unterschied beträgt im Modell $19 - 15 = 4$ Längeneinheiten, was $7 \cdot 4 = 28$ Metern in der Realität entspricht.

Wäre die Neigung der oberen Fläche gegen die Horizontale 45^o, dann wäre der Neigungswinkel unten schon um 10^o Grad größer. Mit einem kleineren Winkel für den Winkel der oberen Fläche gegen die Horizontale ist dieser Winkel sogar größer als 10^o. Grad.

f) $\overrightarrow{S_{15}E} = \vec{E} - \vec{S_{15}} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

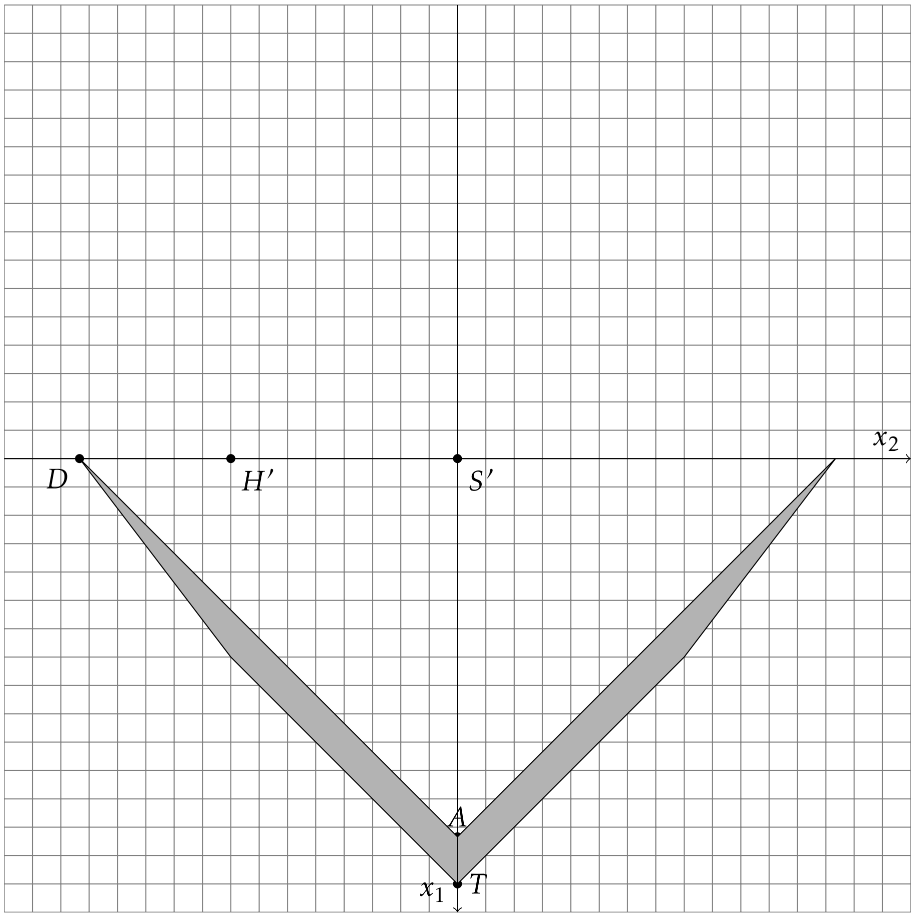
Gesucht ist also der Schnittpunkt der Gerade $s : \vec{S_{15}} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

mit der x_1x_2-Ebene ($x_3 = 0$):

Also muss für x_3 gelten: $15 - \lambda \cdot 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 7,5$.

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} + 7,5 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22,5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

g) Zeichnung



Es handelt sich um Trapeze.