

Abi 13 Lsg Geo II

1. a) B befindet sich jeweils 12 in x_1 und in x_2 -Richtung: $B(12|12|0)$

Das Volumen berechnet sich zu

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 12 \cdot 8 = 4 \cdot 12 \cdot 8 = 384$$

Der Pavillon enthält also ein Volumen von $384m^3$.

$$\text{b) } \overrightarrow{SB} = \begin{pmatrix} 12-6 \\ 12-6 \\ 0-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{SC} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{SB} \times \overrightarrow{SC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -96 \\ -72 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Bestimme c über Einsetzen des Punktes C:

$$0 \cdot 0 + 4 \cdot 12 + 3 \cdot 0 + c = 0$$

$$\Rightarrow c = -48$$

Gleichung der Ebene E ist also:

$$E : 4x_2 + 3x_3 - 48 = 0 \checkmark$$

- c) Stelle die Gleichung derjenigen Geraden auf, die durch den Mittelpunkt M der Grundfläche geht und senkrecht auf der südlichen Außenwand (also der Ebene E) steht. Das geht am einfachsten indem man M als Aufpunkt und den Normalenvektor zu E als Richtungsvektor verwendet:

$$g : \vec{X} = \vec{M} + \lambda \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 + 4\lambda \\ 3\lambda \end{pmatrix}$$

Bestimmung des Schnittpunktes mit E durch Einsetzen der Geradengleichung in die Ebenengleichung:

$$0 \cdot 6 + 4 \cdot (6 + 4\lambda) + 3 \cdot (3\lambda) - 48 = 0$$

$$16\lambda + 9\lambda - 24 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{24}{25}$$

Für die Höhe interessiert nur die x_3 -Komponente:

$$h = 0 + 3\lambda = 0 + 3 \cdot \frac{24}{25} = \frac{72}{25} = \frac{288}{100} = 2,88$$

Die Befestigung befindet sich also auf einer Höhe von 2,88m.

- d) Berechnung der Fläche mit Hilfe des Vektorproduktes aus $\frac{1}{2}\overrightarrow{SB}$ und $\frac{1}{2}\overrightarrow{SC}$ ergibt:

$$A = \frac{1}{2} \left| \frac{1}{2}\overrightarrow{SB} \times \frac{1}{2}\overrightarrow{SC} \right| = \frac{1}{2} \sqrt{0^2 + (-24)^2 + (-18)^2} = \frac{1}{2} \cdot 30 = 15$$

- e) Der Neigungswinkel gegen die Horizontale ergibt sich aus dem Skalarprodukt der Normalenvektoren. Dabei ist der Normalenvektor für die Horizontale gegeben durch

$$\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\cos(\psi) = \frac{\vec{e}_3 \cdot \vec{n}}{|\vec{e}_3| \cdot |\vec{n}|} = \frac{3}{\sqrt{25} \cdot 1} = 0,6$$

$$\Rightarrow \psi = 53,13$$

Dabei kommt man in der Tabelle etwa zu einem Anteil von etwa 96 bis 97 Prozent.

2. a) Setze die Geradengleichungen gleich und löse das entstehende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rclcl} 8 & +3\lambda & = & -1 & +1\mu \text{ (I)} \\ 1 & +1\lambda & = & 5 & -2\mu \text{ (II)} \\ 7 & +2\lambda & = & -9 & +4\mu \text{ (III)} \end{array}$$

Löse die zweite Gleichung nach λ auf und setze in die dritte ein:

$$\lambda = 4 - 2\mu \text{ (II)' in III}$$

$$7 + 2(4 - 2\mu) = -9 + 4\mu$$

$$16 + 8 - 4\mu = 4\mu$$

$$24 = 8\mu \Rightarrow \mu = 3 \text{ einsetzen in II'}$$

$$\lambda = 4 - 2 \cdot 3 = -2$$

Überprüfen in I:

$$8 - 6 = -1 - 1 \checkmark$$

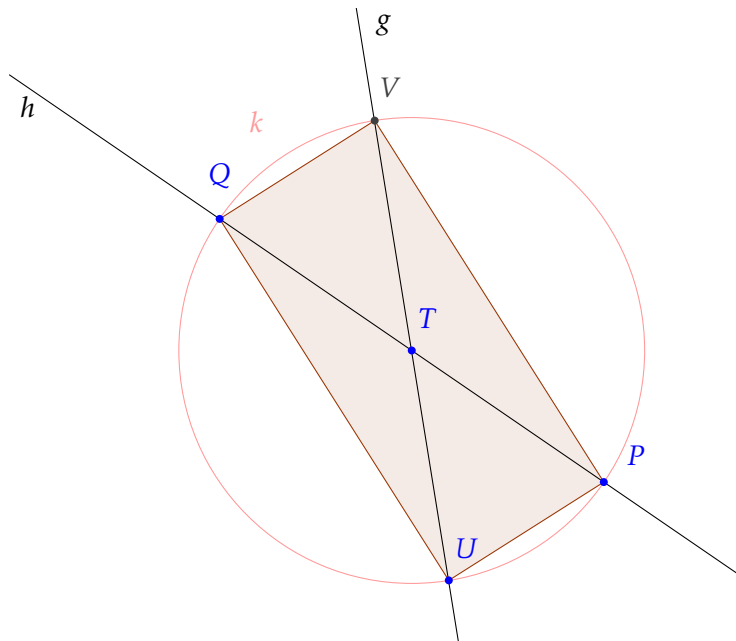
$$\vec{T} = \begin{pmatrix} -1+3 \\ 5-6 \\ -9+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \checkmark$$

- b) Aus dem Gleichungssystem ergab sich $\lambda = -2$. Um zwei gleichweit entfernte Punkte zu erhalten, muss λ um die gleich Zahl "vergrößert" und "verkleinert" werden.

Also z.B. $\lambda = -1$ und $\lambda = -3$:

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 8-3 \\ 1-1 \\ 7-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}; \vec{Q} = \begin{pmatrix} 8-9 \\ 1-3 \\ 7-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- c) Um rechte Winkel bei U und V zu gewährleisten bietet sich ein Thaleskreis über PQ an:



Schneide also die Kugel um T mit Radius \overline{TP} mit der Geraden h.