

## Abi 23 Lsg Ana I

A 1 a)  $f: x \mapsto \ln(x-3)$

Das Argument der Ln-Funktion darf nicht 0 oder kleiner 0 sein:

$$x-3 > 0 \Leftrightarrow x > 3$$

$$D = ]3; \infty[.$$

$$\ln(x-3) = 0 \quad |e^{(\cdot)}$$

$$e^{\ln(x-3)} = e^1$$

$$x-3 = 1$$

$$x = 4$$

b)  $f'(x) = \frac{1}{x-3}$

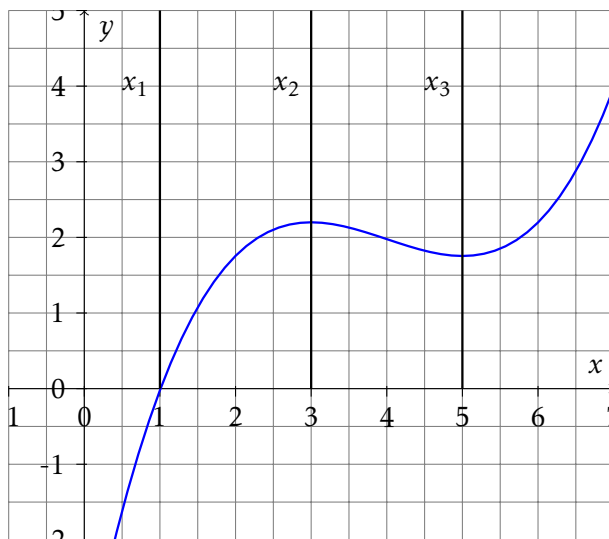
$$f'(x) = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x-3} = 2 \Leftrightarrow 1 = 2 \cdot (x-3) \Leftrightarrow 1 = 2x-6 \Leftrightarrow x = 3,5$$

2 a) Waagrechte Asymptote:  $y = -1$ .

$$\text{Wertemenge: } W_g = ]-1; +\infty[$$

$$\text{b) } \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{x^2} - 1 dx = \left[ -\frac{1}{x} - x \right]_{\frac{1}{2}}^2 = -\frac{1}{2} - 2 - \left( -2 - \frac{1}{2} \right) = 0$$

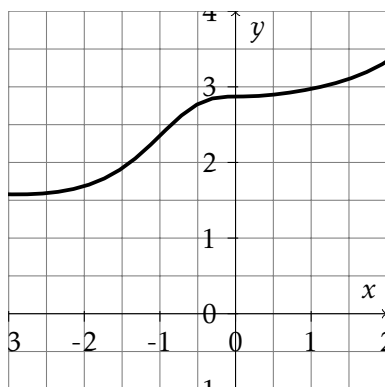
3 a) Die Ableitung der ganzrationalen Funktion hat zwei Nullstellen, nämlich bei  $x_2$  und  $x_3$ . Daher ist die Ableitungsfunktion mindestens zweiten Grades, also muss  $f$  mindestens 3. Grades sein.



b)

- 4 a) Der Graph von  $h$  geht aus dem Graphen von  $g$  hervor, indem dieser um drei nach rechts verschoben und dann an der  $x$ -Achse gespiegelt wird. Also liegt der Tiefpunkt bei  $(2|-1)$ .

b) Zeichnung



B 1 a)  $f(0) = 2 \cdot e^{-\frac{1}{8} \cdot 0^2} = 2 \cdot 1 = 2$

$$f(-x) = 2 \cdot e^{-\frac{1}{8} \cdot (-x)^2} = 2 \cdot e^{-\frac{1}{8} \cdot x^2} = f(x)$$

Die Funktion ist also achsensymmetrisch.

b) Zur Bestimmung der Tangentensteigung wird die Ableitungsfunktion benötigt:

$$f'(x) = 2 \cdot e^{-\frac{1}{8}x^2} \cdot \left(-\frac{1}{8} \cdot 2x\right) = -\frac{1}{2}x \cdot e^{-\frac{1}{8}x^2}$$

$$f'(-2) = -\frac{1}{2} \cdot (-2) \cdot e^{-\frac{1}{8}(-2)^2} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0,61$$

Gleichung der Tangente w:

$$w : y = e^{-\frac{1}{2}} \cdot x + t$$

$$2e^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2) + t$$

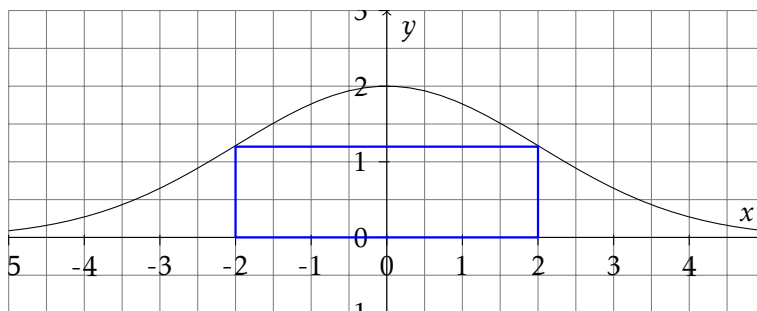
$$4e^{-\frac{1}{2}} = t$$

$$w : y = e^{-\frac{1}{2}} \cdot x + 4e^{-\frac{1}{2}}$$

Nullstelle der Tangente w:

$$0 = e^{-\frac{1}{2}} \cdot x + 4e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow x = -4$$



c)

d)  $f(c) - 0 = 1 \Leftrightarrow f(c) = 1 \Leftrightarrow 2 \cdot e^{-\frac{1}{8} \cdot c^2} = 1 \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{8} \cdot c^2} = 0,5$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{8}c^2 = -\ln(2) \Leftrightarrow c^2 = 8 \cdot \ln(2) \Leftrightarrow c = 2\sqrt{2\ln(2)} \approx 2,35$$

e) Breite des Rechtecks:  $b = 2c$

Höhe des Rechtecks:  $h = f(c) = 2 \cdot e^{-\frac{1}{8} \cdot c^2}$

Flächeninhalt:  $A(c) = 4c \cdot e^{-\frac{1}{8} \cdot c^2}$

$$f) \quad A'(c) = 4 \cdot e^{-\frac{1}{8} \cdot c^2} + 4c \cdot \left( e^{-\frac{1}{8} \cdot c^2} \cdot \left( -\frac{1}{4}c \right) \right)$$

$$= e^{-\frac{1}{8} \cdot c^2} \cdot (4 - c^2)$$

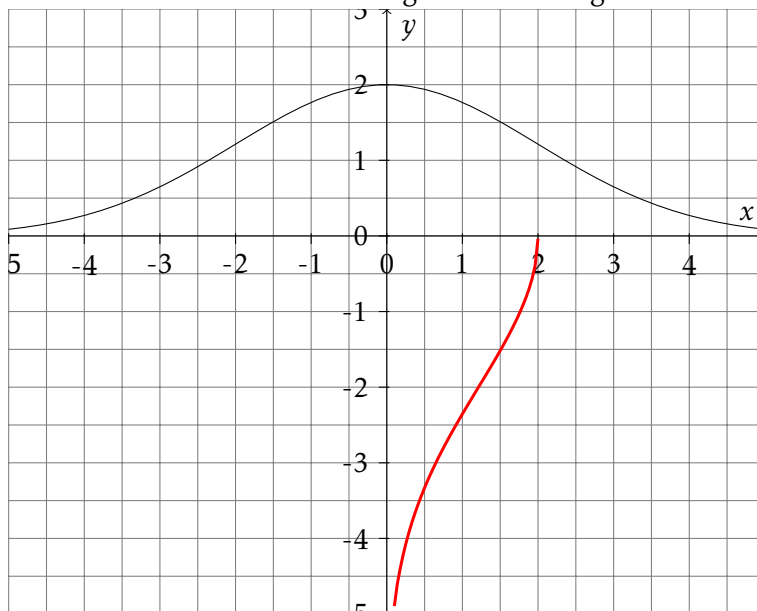
$$A'(c) = 0 \Leftrightarrow 4 = c^2 \Leftrightarrow c = -2 \vee c = +2$$

g)  $f'_k(x) = f'(x)$ , da sich die einzelnen Funktionen nur durch die additive Konstante  $k$  unterscheiden, die beim Ableiten wegfällt.

Im Definitionsbereich  $x \leq 0$  gilt:  $f'(x) = \underbrace{-\frac{1}{2}}_{<0} \underbrace{x}_{<0} \cdot \underbrace{e^{-\frac{1}{8}x^2}}_{>0}$

$>0$

Die Funktion ist dort also streng monoton steigend und daher auch umkehrbar.



h) Gemeinsame Werte mit der Umkehrfunktion gibt es nur, wenn sie sich auf der Winkelhalbierenden  $y = x$  treffen.

Suche also gemeinsame Punkte von  $f_k(x)$  mit  $w(x) = x$ .

Solche Werte kann es nur geben, wenn der Graph der Funktion um 2 oder mehr nach unten verschoben wird. Daher gilt für das Intervall:

$$k \in ]-2; +\infty[$$

- 2 a) Bretie: 8m; Höhe: 2m;  
 b) Nur für  $a < 0$  hat der Graph von  $g$  einen Hochpunkt und ist nach unten geöffnet; nur für  $b > 0$  schneidet er die  $y$ -Achse oberhalb der  $x$ -Achse.  
 c) Der Graph III kann ausgeschlossen werden, da  $f(x)$  an der Stelle  $x=4$  eine Nullstelle haben müsste ( $F_{III}(x)$  hat dort ein Maximum).

Der Graph II kann ausgeschlossen werden, da der Flächeninhalt zwischen Graph  $G_f$  und  $x$ -Achse im ersten Quadranten den Wert 2 deutlich überschreitet.

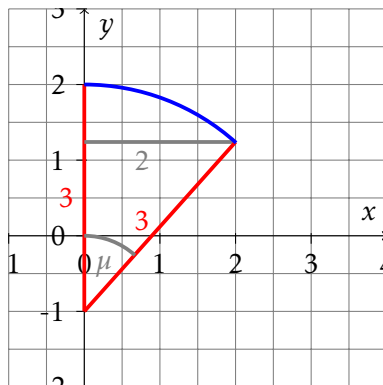
- d) Ermittlung ohne Fenster:  $F(4) - F(-4) \approx 10$ , also etwa  $10 \text{ m}^2$ .

Zur Bestimmung von  $a$ :

Damit der schraffierte Teil  $6 \text{ m}^2$  einnimmt, muss das Fenster eine Flächen  $4 \text{ m}^2$  einnehmen. Also muss gelten:

$$\int_r^s (ax^4 + 1,5) dx = 4, \text{ wobei } r \text{ und } s \text{ die Nullstellen der Funktion sind, die sich aus } a \text{ ergeben.}$$

- e) Skizze



Die Strecke von  $M(0 | -1)$  nach  $P(2 | y_k)$  hat die Länge 3. Damit ergeben die Punkte  $M$ ,  $(0 | y_k)$  und  $P$  ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Winkel  $\mu$  bei  $M$  mit

dem Winkel des Kreisbogens übereinstimmt. Also gilt:

$$\sin(\mu) = \frac{2}{3} \Rightarrow \mu = 41^\circ$$

Winkel für alle 4 Bögen:  $4\mu = 167,24^\circ$

Bogenlänge:  $b = \frac{\mu}{360^\circ} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 3 \approx 8,76$

Die Länge des oberen Randes beträgt etwa 8 Meter und 80 cm.