Abi 23 Lsg Ana II

A 1 a) Nenner darf nicht 0 sein:

$e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = ln(2)$

$D = \mathbb{R} \setminus \{ln2\}$.

Schnittpunkt mit der y-Achse:

$f(0) = \frac{1}{1-2} = -1$

b) $f'(x) = \frac{e^x \cdot (e^x - 2) - e^x \cdot e^x}{(e^x-2)^2} = e^x \cdot \frac{e^x - 2 - e^x}{(e^x-2)^2} = \frac{2e^x}{(e^x-2)^2}$

2 a) $g(1) = 2$

$g'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$

$g'(1) = \frac{1}{2}$

$y = \frac{1}{2}x + t$

An der Stelle x=1: $2 = \frac{1}{2} \cdot 1 + t \Rightarrow t = 1,5$

b) $\sqrt{y} + 1 = x$

$\sqrt{y} = x - 1$

$y = (x-1)^2$

3 a) $\int\limits_0^{2a} -x^2 + 2axdx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + ax^2\right]_0^{2a} = -\frac{1}{3} \cdot 8a^3 + a \cdot 4a^2 - 0 = 4a^3 - \frac{8}{3}a^3 = \frac{4}{3}a^3 \checkmark$

b) x-Koordinate des Scheitelpunkts: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 2a = 0 \Leftrightarrow x = a$
Höhe im Scheitelpunkt $f(a) = -a^2 + 2a \cdot a = -a^2 + 2a^2 = a^2$

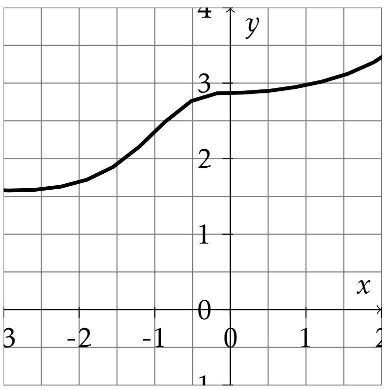
Bedingung für das Quadrat: $a^2 \cdot a^2 = \frac{4}{3}a^3$

$a^4 = \frac{4}{3}a^3 \qquad a \neq 0$

$a = \frac{4}{3}$

4 a) Der Graph von h geht aus dem Graphen von g hervor, indem dieser um drei nach rechts verschoben und dann an der x-Achse gespiegelt wird. Also liegt der Tiefpunkt bei (2|-1).

b) Zeichnung



B 1 a) Momentane Änderungsrate der Staulänge $f(x) = x \cdot (8-5x) \cdot \left(1 - \frac{x}{4}\right)^2$

Änderungsrate hat den Wert Null, wenn einer der Faktoren Null ist:

$x = 0 \vee x = \frac{8}{5} \vee x = 4$

Nachdem keine weiteren Faktoren existieren, kann auch keine weitere Nullstelle gefunden werden.

b) f beschreibt die lokale Änderungsrate der Staulänge. f(2) < 0 bedeutet, dass die Staulänge zum Zeitpunkt t = 2h gerade abnimmt.

c) In der Grafik sieht man, dass es ein Maximum der lokalen Änderungsrate kurz nach Beginn der Zeitmessung gibt. Dieses wird nun berechnet.

$f'(x) = \left(5x^2 - 16x + 8\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{4}\right)$ (laut Angabe)

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 5x^2 - 16x + 8 = 0 \vee x = 4$

Für x = 4 ist in der Grafik zu erkennen, dass es sich nicht um das gesuchte Maximum handelt.

$5x^2 - 16x + 8 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{16 \pm \sqrt{256-160}}{10} = 1,6 \pm 0,4 \cdot \sqrt{6}$

$x_1 = 1,6 - 0,4 \cdot \sqrt{6} : f'(0) = 8 > 0 \wedge f'(1,6) \approx -2,88 < 0 \Rightarrow \text{HOP}$

$x_2 = 1,6 + 0,4 \cdot \sqrt{6} : f'(1,6) \approx -2,88 < 0 \wedge f'(3) = \frac{5}{4} > 0 \Rightarrow \text{TIP}$

$x_1 = 1,6 - 0,4 \cdot \sqrt{6} \approx 0,62$

Nach 0,62 Stunden nimmt die Staulänge am stärksten zu.

d) Zum Zeitpunkt $x = \frac{8}{5} = 1,6$ ist der Flächeninhalt unter G_f am größten, also der Stau am längsten. Danach nimmt die Staulänge ab.

e) Wenn s die Funktion ist, die die Staulänge angibt, dann muss gelten:

$s'(x) = f(x)$

$s'(x) = -\frac{5}{16}x^4 + 3x^3 - 9x^2 + 8x = f(x)\checkmark$

$s(x) = \left(\frac{x}{4}\right)^2 \cdot (4-x)^3 \Rightarrow s(4) = \left(\frac{4}{4}\right)^2 \cdot (4-4)^3 = 0$

Um 10:00 ist die Staulänge 0.

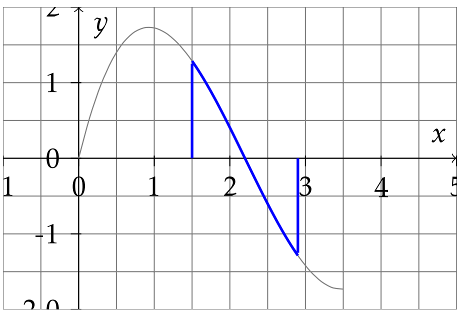
f) $Z = s(2) - s(0,5) = \left(\frac{2}{4}\right)^2 \cdot (4-2)^3 - \left(\frac{0,5}{4}\right)^2 \cdot (4-0,5)^3$

$= \frac{681}{512} \approx 1,33$

Die Staulänge nimmt im angegebenen Zeitintervall um 1,33 km zu.

Mittlere Zunahme pro Zeit: $1,33 : 1,5 \approx 0,89$ Die Staulänge nimmt in dem Zeitintervall mit durchschnittlich 890m pro Stunde zu.

g) 7:30 entspricht x = 1,5. Zwischen 1,5 und 2,2 nimmt die Staulänge zu, dann nimmt sie wieder ab. Irgendwann hat die Staulänge soviel abgenommen, dass wieder der Stand von 7:30 erreicht ist.



2 a) Es handelt sich um die Potenzfunktion $p(x) = x^k$, die um 3 in positiver x-Richtung und 1 in positiver y-Richtung verschoben ist. Daher gilt für geradzahlige k: $\lim\limits_{x\to-\infty} (x-3)^k + 1 = +\infty$

und für ungeradzahlige k: $\lim\limits_{x\to-\infty} (x-3)^k + 1 = -\infty$

b) Wegen der Verschiebung ergeben sich statt O(0|0) und P(1|1) die verschobenen Punkte O'(3|1) und P'(4|2) als gemeinsame Punkte aller Graphen.

c) Damit ein Graph Tangente sein kann muss es sich um eine Gerade handeln. Damit bleibt nur k = 2, denn dann ist die Ableitungsfunktion eine lineare Funktion. In diesem Fall ergibt sich:

$h_2(x) = (x-3)^2 + 1 \qquad h_2'(x) = 2x - 6$

Gesucht sind also Stellen von h_2 an denen die Steigung der Geradensteigung $m = 2$ entspricht. $h_2'(x) = 2x - 6 = 2$

$2x = 8 \Leftrightarrow x = 4$

An der Stelle x = 4 hat also $h_2(x)$ die Steigung 2. Berührt die Gerade 2x-6 dort auch den Graphen?

$h_2'(4) = 2 \qquad h_2(4) = (4-3)^2 + 1 = 2\checkmark$

Die Ableitungsfunktion ist also tatsächlich Tangente am Graphen und zwar an der Stelle x = 4.

d) In einem Trapez sind zwei Seiten parallel. Laut Zeichnung sollte $\overline{RS} \| \overline{PQ}$ gelten. Dies ist aber selbstverständlich, da R und S die gleiche x-Koordinate (x=2) und P und Q die gleiche x-Koordinate (x=4) besitzen.

Der Flächeninhalt eines Trapezes berechnet sich zu $h \cdot \frac{1}{2} \cdot (a+c)$. Für alle Trapeze in dieser Aufgabe gilt $h = 2$.

$h_k(2) = (-1)^k + 1 \qquad h_k(4) = 2$

$h_k'(2) = k \cdot (-1)^{k-1} \qquad h_k'(4) = k$

FI des Trapezes für k (k gerade):

$\frac{1}{2} \cdot ((k-2) + (2-(-k))) \cdot 2 = 2k$

FI des Trapezes für k+1 (k ungerade):

$\frac{1}{2} \cdot ((k+1-2) + (k+1)) \cdot 2 = 2k$