

## Abi 23 Lsg Geo II

A a)  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ , Richtungsvektor der Geraden g

$$\vec{A} = \vec{B} + 2 \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \checkmark$$

- b) Eine Raute hat vier gleichlange Seiten. Die Länge der Seite von A nach B lässt sich bestimmen:

$$|\vec{AB}| = |\vec{B} - \vec{A}| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \right\| = 6$$

Der Richtungsvektor  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  auf der Geraden h hat die Länge 1. Da der Punkt C auf der Geraden h liegen und 6 LE von B entfernt sein muss, gilt:

$$\vec{C} = \vec{B} + 6 \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gesucht ist nun nur noch Punkt D. Da gegenüberliegende Seiten einer Raute parallel sein müssen, addiert man den Verbindungsvektor von B nach A zum Punkt C:

$$\vec{D} = \vec{C} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

B a) Ermittle den Normalenvektor, der auf der Ebene DEF senkrecht steht:

$$\vec{DE} \times \vec{DF} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 36 \\ 27 \end{pmatrix} = 9 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Normalengleichung: } 2x + 4y + 3z + c = 0$$

$$\text{Setze den Punkt E ein: } 0 + 24 + 18 + c = 0 \Rightarrow c = -42$$

$$\text{Ebenengleichung: } 2x + 4y + 3z - 42 = 0$$

b) Den Normalenvektor der xy-Ebene angeben und den Winkel zwischen den beiden Normalenvektoren bestimmen:

$$\vec{n}_{xy} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}}{1 \cdot \sqrt{2^2+4^2+3^2}} = \frac{3}{\sqrt{29}} \approx 0,56$$

$$\Rightarrow \alpha = 56,15^\circ$$

c) Der Flächeninhalt  $6 \cdot 6$  kann durch ein Quadrat in der xy-Ebene dargestellt werden, auf dessen Seiten der Ursprung und die Punkte A, B und C liegen. Um den gesuchten Flächeninhalt zu bekommen, subtrahiert man davon drei Dreiecke, die im Quadrat, aber außerhalb des Dreiecks ABC liegen.

Eines davon enthält den Ursprung und hat den FI:  $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6$ .

Ein weiteres enthält die Seite AB und hat den FI:  $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6$ .

Das letzte enthält die Seite AC mit dem FI:  $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3$ .

d) Der Körper besteht aus einem Prisma (Schnitt auf der Höhe  $z = 6$ ) und einer Pyramide (Grundfläche auf der Höhe 6 und Spitze bei F). Beide Körper haben die gleiche Grundfläche (kann mit Tielaufgabe C berechnet werden):

$$G = 6 \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 = \frac{27}{2}$$

$$V_{Prisma} = G \cdot 6 = 81$$

$$V_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot 6 = 27$$

$$V_{Körper} = V_{Prisma} + V_{Pyramide} = 81 + 27 = 108$$

- e) Der Punkt  $P_k$  liegt auf einer Geraden. Zwei Punkte dieser Geraden erhält man durch die Wahl  $k = 0$  und  $k = 1$ :

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$P_k$  liegt im Intervall  $k \in ]0; 1[$ .

Die Schnittalebene steht senkrecht und geht durch die z-Achse. Durch Veränderung von  $k$  dreht sich die Ebene. Es gibt zwei unterschiedliche Bereiche: Entweder die Ebene schneidet die Kante  $\overline{AC}$  oder die Ebene schneidet die Kante  $AB$ . Der Bereich für  $k$  bei dem  $\overline{AB}$  geschnitten wird, scheint größer zu sein.

Berechne zuerst dasjenige  $k$  bei dem  $A$  in der Schnittalebene enthalten ist. Dazu kann man die Gerade  $g$ , die vom Ursprung zu  $A$  führt, mit der Geraden schneiden, die von  $P_k$  enthält:

$$\mu \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{I: } 6\mu = 1 - k$$

$$\text{II: } 3\mu = k \text{ II in I:}$$

$$2k = 1 - k \Rightarrow k = \frac{1}{3}$$

Der größere Bereich ist also  $k \in \left] \frac{1}{3}; 1 \right[$

Wenn die Ebene in diesem Bereich gedreht wird, dann enthält sie die Kanten  $\overline{BC}, \overline{EF}, \overline{AB}, \overline{DE}$ .

f) Q ist ein Punkt auf der Geraden AD:  $X = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + q \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ q \end{pmatrix}$ .

Für einen  $90^\circ$ -Winkel muss das Skalarprodukt 0 ergeben:

$$\vec{QR} \circ \vec{QF} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0-6 \\ 6-3 \\ 2-q \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3-6 \\ 0-3 \\ 12-q \end{pmatrix} = (-6) \cdot (-3) + 3 \cdot (-3) + (2-q) \cdot (12-q)$$

$$= 18 - 9 + 24 - 14q + q^2 = 33 - 14q + q^2 = 0$$

$$q_{1/2} = \frac{14 \pm \sqrt{196-132}}{2} = 7 \pm 4$$

Nachdem Q auf der Kante liegt,  $q \in [0; 6] \Rightarrow q = 3$ .

- g) Mit dem ersten Ausdruck wird der Abstand des Punktes C(0|3|0) von der Geraden AB und der dazu passende Fußpunkt S bestimmt. T ist dann der Punkt, der von S aus den gleichen Abstand wie C nur senkrecht nach oben hat. Daher ist T der Punkt C, nachdem der Körper gedreht wurde.