Abi 23 Lsg Geo II

A a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, Richtungsvektor der Geraden g

$$\vec{A} = \vec{B} + 2 \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \checkmark$$

b) Eine Raute hat vier gleichlange Seiten. Die Länge der Seite von A nach B lässt sich bestimmen:

$$\left|\vec{AB}\right| = \left|\vec{B} - \vec{A}\right| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \right\| = 6$$

Der Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf der Geraden h hat die Länge 1. Da der Punkt C auf der Geraden h liegen und 6 LE von B entfernt sein muss, gilt:

$$\vec{C} = \vec{B} + 6 \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gesucht ist nun nur noch Punkt D. Da gegenüberliegende Seiten einer Raute parallel sein müssen, addiert man den Verbindungsvektor von B nach A zum Punkt C:

$$\vec{D} = \vec{C} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

B a) Ermittle den Normalenvektor, der auf der Ebene DEF senkrecht steht:

$$\vec{DE} \times \vec{DF} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 36 \\ 27 \end{pmatrix} = 9 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Normalengleichung: $2x + 4y + 3z + c = 0$

Setze den Punkt E ein: $0 + 24 + 18 + c = 0 \Rightarrow c = -42$

Ebenengleichung: $2x + 4y + 3z - 42 = 0$

b) Den Normalenvektor der xy-Ebene angeben und den Winkel zwischen den beiden Normalenvektoren bestimmen:

$$\vec{n}_{xy} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}}{1 \cdot \sqrt{2^2+4^2+3^2}} = \frac{3}{\sqrt{29}} \approx 0,56$$

$\Rightarrow \alpha = 56,15^o$

c) Der Flächeninhalt $6 \cdot 6$ kann durch ein Quadrat in der xy-Ebene darsgestellt werden, auf dessen Seiten der Ursprung und die Punkte A, B und C liegen. Um den gesuchten Flächeninhalt zu bekommen, subtrahiert man davon drei Dreiecke, die im Quadrat, aber außerhalb des Dreiecks ABC liegen.

Eines davon enthält den Ursprung und hat den FI: $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6$.

Ein weiteres enthält die Seite AB und hat den FI: $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6$.

Das letzte enthält die Seite AC mit dem FI: $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3$.

d) Der Körper besteht aus einem Prisma (Schnitt auf der Höhe z = 6) und einer Pyramide (Grundfläche auf der Höhe 6 und Spitze bei F). Beide Körper haben die gleiche Grundfläche (kann mit Tielaufgabe C berechnet werden):

$G = 6 \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 = \frac{27}{2}$

$V_{Prisma} = G \cdot 6 = 81$

$V_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot 6 = 27$

$V_{Koerper} = V_{Prisma} + V_{Pyramide} = 81 + 27 = 108$

e) Der Punkt P_k liegt auf einer Geraden. Zwei Punkte dieser Geraden erhält man durch die Wahl k = 0 und k = 1:

$P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

P_k liegt im Intervall $k \in]0;1[$.

Die Schnittebene steht senkrecht und geht durch die z-Achse. Durch Veränderung von k dreht sich die Ebene. Es gibt zwei unterschiedliche Bereiche: Entweder die Ebene schneidet die Kante $\overline{AC}$ oder die Ebene schneidet die Kante AB. Der Bereich für k bei dem $\overline{AB}$ geschnitten wird, scheint größer zu sein.

Berechne zuerst dasjenige k bei dem A in der Schnittebene enthalten ist. Dazu kann man die Gerade g, die vom Ursprung zu A führt, mit der Gerade schneiden, die von P_k enthält:

$\mu \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

I: $6\mu = 1 - k$

II: $3\mu = k$ II in I:

$2k = 1 - k \Rightarrow k = \frac{1}{3}$

Der größere Bereich ist also $k \in \left]\frac{1}{3}; 1\right[$

Wenn die Ebene in diesem Bereich gedreht wird, dann enthält sie die Kanten $\overline{BC}, \overline{EF}, \overline{AB}, \overline{DE}$.

f) Q ist ein Punkt auf der Geraden AD: $X = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + q \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ q \end{pmatrix}$.

Für einen 90°-Winkel muss das Skalarprodukt 0 ergeben:

$\vec{QR} \circ \vec{QF} = 0$

$$\begin{pmatrix} 0-6 \\ 6-3 \\ 2-q \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3-6 \\ 0-3 \\ 12-q \end{pmatrix} = (-6) \cdot (-3) + 3 \cdot (-3) + (2-q) \cdot (12-q)$$
$$= 18 - 9 + 24 - 14q + q^2 = 33 - 14q + q^2 = 0$$

$q_{1/2} = \frac{14 \pm \sqrt{196-132}}{2} = 7 \pm 4$

Nachdem Q auf der Kante liegt, $q \in [0;6] \Rightarrow q = 3$.

g) Mit dem ersten Ausdruck wird der Abstand des Punktes C(0|3|0) von der Geraden AB und der dazu passende Fußpunkt S bestimmt. T ist dann der Punkt, der von S aus den gleichen Abstand wie C nur senkrecht nach oben hat. Daher ist T der Punkt C, nachdem der Körper gedreht wurde.