Abi 22 Lsg Ana I

A 1 a) $f: x \mapsto \frac{x^2+2x}{x+1}$

Definitionsmenge: Der Nenner darf nicht Null sein: $x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Nullstellen:

$x^2 + 2x = 0$

$x \cdot (x+2) = 0$

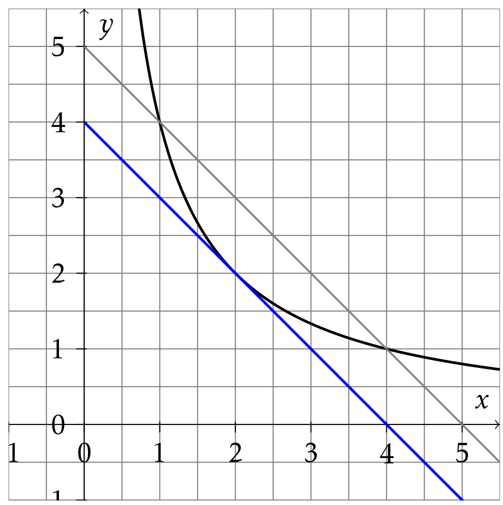
$x_1 = 0 \qquad x_2 = -2$

b) Term einer gebrochen rationalen Funktion h. Die Funktion hat eine waagrechte Asymptote und ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, dann bietet sich die e-Funktion an:

$h: x \mapsto e^x + 3$

Diese Funktion schneidet die y-Achse bei $e^0 + 3 = 4$✓

2 a) $\int\limits_1^e \frac{4}{x} dx = [4ln(x)]_1^e = 4ln(e) - 4ln(1) = 4 - 0 = 4$



b)

Dies scheint bei $x_o = 2$ der Fall zu sein.

3 a) $f(6) = 2$ (bei x=6 den Funktionswert ablesen)

$g(6) = f(f(6)) = f(2) = 3$

b) $g'(x) = f'(f(x)) \cdot f'(x)$

$0 = f'(f(x)) \cdot f'(x)$

Ein Produkt ist Null, wenn einer der Faktoren Null ist.

1.Fall: $f'(x) = 0$. Laut Angabe ist das genau dann, wenn $x_1 = 3$.

2.Fall: $f'(f(x)) = 0$. Hier muss $f(x) = 3$ sein, da nur $f'(3) = 0$. Beim Betrachten des Graphen gibt es genau zwei Stellen, die den Funktionswert $y = 3$ haben: $x_2 = 2$ und $x_3 = 6$.

Für $x \in \{2; 3; 6\}$ hat der Graph von g eine waagerechte Tangente.

4 a) $f_a'(x) = -a \cdot e^{-x} + 0 = -a \cdot e^{-x}$

$f_a'(0) = -a \cdot e^{-0} = -a \cdot 1 = -a\checkmark$

b) Die Tangente ist durch die Gleichung $y = m \cdot x + t$ bestimmt.

Aus Teilaufgabe a ist bekannt, dass $m = -a$ gilt.

Der y-Achsenabschnitt t lässt sich ebenfalls leicht berechnen, da $t = f_a(0) = a \cdot e^{-0} + 3 = a + 3$ gilt.

Die Gleichung der Tangente ist also: $y = -a \cdot x + a + 3$

Für eine positive Steigung muss $m > 0 \Rightarrow a < 0$ gelten.

Die Nullstelle der x-Achse (Schnittpunkt mit der x-Achse) findet man mit:

$0 = -a \cdot x + a + 3$

$-a - 3 = -a \cdot x$

$\frac{a+3}{a} = x$

$1 + \frac{3}{a} = x$

x soll größer als 0,5 sein:

$1 + \frac{3}{a} > \frac{1}{2}$

$\frac{3}{a} > -\frac{1}{2}$ | (Kehrwert)

$\frac{a}{3} < -2$

$a < -6$

Zur Verdeutlichung, wird für die Lösung der Aufgabe nicht gebraucht:

Beispiel: $a = -12$. Dann ist die Geradengleichung:

$y = 12x - 12 + 3 = 12x - 9$

Steigung ist positiv $\checkmark$.

Schnittpunkt mit der x-Achse: $0 = 12x - 9 \Rightarrow 9 = 12x \Rightarrow 3 = 4x \Rightarrow \frac{3}{4} = x > \frac{1}{2}\checkmark$

B $f: x \mapsto 2 \cdot \sqrt{10x - x^2}$ $\qquad D_f = [0;10]$

a) $2 \cdot \sqrt{10x - x^2} = 0$

Die Wurzel ist dann Null wenn ihr Argument Null ist. $10x - x^2 = 0$

$x \cdot (10 - x) = 0$

$x_1 = 0 \qquad x_2 = 10$

b) $f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{10x-x^2}} \cdot (10 - 2x) = \frac{10-2x}{\sqrt{10x-x^2}}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x_3 = 5$

$f(5) = 10$, Extrempunkt ist also $E(5|10)$.

Die Funktion ist im Definitionsbereich stetig, sowohl $f(0) = 0$ als auch $f(10) = 0$. Da $f(5) > 0$ muss E ein Hochpunkt sein.

c) Sowohl 50 als auch $\sqrt{10x - x^2}$ sind positiv. Rechtskrümmung bedeutet, dass $f''(x) < 0$ ist, also muss der Faktor links im Nenner im Intervall $[0;10]$ negativ sein. Das gilt nur für $(x^2 - 10x)$, denn z.B. $5^2 - 10 \cdot 5 = -25$. Also ist I der Term für die zweite Ableitungsfunktion.

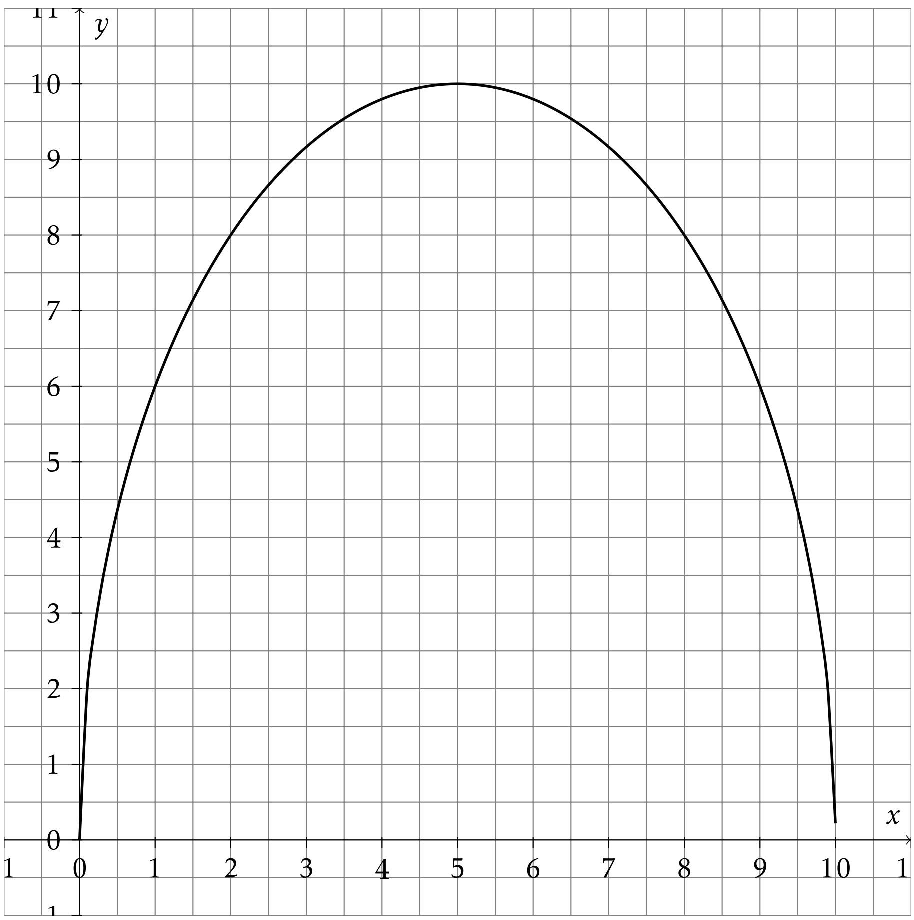
d) $f(5 - x) = 2 \cdot \sqrt{10 \cdot (5 - x) - (5 - x)^2} = 2\sqrt{50 - 10x - 25 + 10x - x^2} = 2\sqrt{25 - x^2}$

$f(5 + x) = 2 \cdot \sqrt{10 \cdot (5 + x) - (5 + x)^2} = 2\sqrt{50 + 10x - 25 - 10x - x^2} = 2\sqrt{25 - x^2}$

$x = 5$ ist eine senkrechte Gerade. Berechne ich einen Funktionswert, der um x von dort in negativer x-Richtung entfernt ist, so erhalte ich den gleichen Funktionswert, wenn ich um dieses x in positiver x-Richtung entfernt bin. Also ist der Graph symmetrisch zu $x = 5$.

e) Der maximale Definitionsbeeich für $f'(x)$ ist $]0;10[$. Es gilt $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = +\infty$, da der Nenner gegen Null und der Zähler gegen Zehn strebt.

f) $f(8) = 2 \cdot \sqrt{80 - 64} = 2 \cdot \sqrt{16} = 8$



g) $f'(2)=\frac{10-2\cdot 2}{\sqrt{10\cdot 2-2\cdot 2}}=\frac{6}{\sqrt{20-4}}=\frac{6}{4}=1,5$

$\tan(\alpha)=1,5\Rightarrow\alpha=56,31^{o}$

h) Breite des Rechtecks: $2\cdot(5-s)$

Höhe des Rechtecks: $f(s)=2\cdot\sqrt{10\cdot s-s^2}$

Länge der Diagonalen d:

$d^2=4\cdot(5-s)^2+4\cdot(10\cdot s-s^2)$

$=4\cdot(25-10s+s^2)+4\cdot(10s-s^2)$

$=100-40s+4s^2+40s-4s^2=100$

$\Rightarrow d = 10\checkmark$

i) Wird das Loch in 3,6m Höhe gebohrt, so spritzt das Wasser 9,6m weit.

j) $f(x) = 6$

$2\sqrt{10x - x^2} = 6$

$\sqrt{10x - x^2} = 3$

$10x - x^2 = 9$

$x^2 - 10x + 9 = 0$

$x_{1/2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2} = 5 \pm 4$

Das Loch muss also entweder auf 1 Meter - oder auf 9 Meter Höhe gebohrt werden.
Das Maximum der Spritzweite wird auf einer Höhe von 5 Metern erwartet.

k) $\Delta V = \int\limits_0^{60} 0,25t - 25dt = \left[0,125t^2 - 25t\right]_0^{60} = 0,125 \cdot 3600 - 25 \cdot 60 - 0 = 450 - 1500 = -1050$

Es fließen 1050 Liter ab.