Abi 21 Lsg Geo II

A

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 104 \\ -42 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad \vec{u} = \begin{pmatrix} -13 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Laserstrahl:

$$g : \vec{X} = \vec{P} + \lambda \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 104 \\ -42 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -13 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Schnitt Laserstrahlx_2x_3Ebene:

$$x_1 = 0 \Rightarrow 104 + \lambda \cdot (-13) = 0 \Rightarrow \lambda = 8$$

Schnittpunkt:

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} 104 \\ -42 \\ 10 \end{pmatrix} + 8 \cdot \begin{pmatrix} -13 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Abstand zum Kreismittelpunkt:

$$\vec{MS} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ -2-0 \\ 18-20 \end{pmatrix} \qquad \left|\vec{MS}\right| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8}$$

$$\sqrt{8} < \sqrt{9} = 3$$

Der Laserschnittpunkt mit der x_2x_3-Ebene ist also $\sqrt{8} < 3$ vom Mittelpunkt der Kreisscheibe entfernt. Das Verkehrsschild wird also vom Laserstrahl getroffen.

B a)

$$\vec{AF} \circ \vec{BF} = \begin{pmatrix} 0-5 \\ 2-5 \\ 4-0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0-(-5) \\ 2-5 \\ 4-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$= -25 + 9 + 16 = 0 \checkmark$$

b)

$$\vec{AF} \times \vec{BF} = \begin{pmatrix} 0-5 \\ 2-5 \\ 4-0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0-(-5) \\ 2-5 \\ 4-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 40 \\ 30 \end{pmatrix}$$
$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$W : 4x_2 + 3x_3 + c = 0$$

F(0|2|4) liegt in W

$$4 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + c = 0$$
$$8 + 12 + c = 0$$
$$c = -20$$
$$W : 4x_2 + 3x_3 - 20 = 0$$

W ist parallel zur x_1-Achse.

c) $\left|\vec{n}\right| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

Die Grundfläche ist die x_1x_2-Ebene, also $\vec{n}_G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{5 \cdot 1} = 0,6$$
$$\Rightarrow \alpha = 53,1^o$$

d) K liegt auf [DE] und

$$\begin{aligned}
\bar{EK} &= \bar{EF} \\
\vec{K} &= \vec{E} + \frac{|\bar{EK}|}{|\bar{ED}|} \cdot \vec{ED} = \vec{E} + \frac{|\bar{EF}|}{|\bar{ED}|} \cdot \vec{ED} \\
&= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{50}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \sqrt{\frac{4}{25}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + 0,4 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,2 \\ -2 \\ 2,4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Die Koordinaten sind K(3,2|-2|2,4).

e) N(1,6|0|3,2). Die Schenkel [KE] und [EF] sind laut c) gleichlang. Dreieck KFE ist also gleichschenklig. Da N Mittelpunkt der Basis des gleichschenkligen Dreiecks ist, ist die Gerade EN die Symmetrieachse. Also halbiert sie den Winkel an der Spitze.

$$\vec{SE} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{SN} = \begin{pmatrix} 1,6 \\ 0 \\ 3,2 \end{pmatrix} = \frac{4}{5} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Die Verbindungsvektoren sind also linear abhängig, also liegt S auf der Geraden EN.

f) Der gesamte Körper besteht aus 4 Pyramiden ABFS, aus 4 Pyramiden HDES und einer Pyramide EFGHS.

$$\begin{aligned}
V_{ABFS} &= 33\frac{1}{3} \\
V_{HDES} &= 13\frac{1}{3} \\
V_{EFGHS} &= \frac{1}{3}\sqrt{8} \cdot \sqrt{8} \cdot 4 = 10\frac{2}{3} \\
V_{ges} &= 4 \cdot V_{ABFS} + 4 \cdot V_{HDES} + 10\frac{2}{3} = 197\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

g) Der Körper ist symmetrisch zur x_3-Achse. Also muss der Kugelmittelpunkt auf der x_3-Achse liegen.

Die Koordinaten des Mittelpunktes sind also M(0|0|z).

$$\begin{aligned}
\left|\bar{M}F\right| &= \left|\bar{M}A\right| \\
\left|\begin{pmatrix} 0-0 \\ 2-0 \\ 4-z \end{pmatrix}\right| &= \left|\begin{pmatrix} 5-0 \\ 5-0 \\ 0-z \end{pmatrix}\right| \\
0^2 + 2^2 + (4-z)^2 &= 5^2 + 5^2 + (-z)^2 \\
4 + 16 - 8z + z^2 &= 25 + 25 + z^2 \\
20 - 8z &= 50 \\
-30 &= 8z \\
-3,75 &= z
\end{aligned}$$

Also M(0|0|-3,75) ist der Mittelpunkt des Kreises.