Abi 21 Lsg Geo I

A $g : \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$

a) Gesucht ist der Fußpunkt des Lotes von A auf die Gerade g. Dann steht die Gerade AB senkrecht auf der Geraden g und somit auch senkrecht auf der Geraden h.

$$\begin{aligned}
\vec{AX} \circ \vec{u} &= 0 \\
\left(\vec{X} - \vec{A}\right) \circ \vec{u} &= 0 \\
\left(\begin{pmatrix} 1+3\lambda \\ 7+4\lambda \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} &= 0 \\
\begin{pmatrix} -1+3\lambda \\ 7+4\lambda \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} &= 0 \\
(-1+3\lambda) \cdot 3 + (7+4\lambda) \cdot 4 + 2 \cdot 0 &= 0 \\
-3 + 9\lambda + 28 + 16\lambda &= 0 \\
25 + 25\lambda &= 0 \\
\lambda &= -1
\end{aligned}$$

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b)

$$\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{29}$$

B a)

$$\left|\vec{SA}\right| = \left\|\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$\left|\vec{SB}\right| = \left\|\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

Zwei Schenkel des Dreiecks sind also gleichlang, das Dreieck ist gleichschenklig.

$$\vec{D} = \vec{A} + \vec{BC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Alle Punkte des Quadrats haben die z-Koordinate 4, also liegt E parallel zur xy-Ebene.

b)

$$\vec{SA} \times \vec{SB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ -18 \\ 36 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$x + y - 2z + c = 0$

S einsetzen:

$$-2 + c = 0$$

$$c = 2$$

$x + y - 2z + 2 = 0\checkmark$

c)

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3}\left|\vec{BC}\right|^2 \cdot 3 \\ &= \frac{1}{3} \cdot \sqrt{(-6)^2 + (-6)^2 + 0^2}^2 \cdot 3 \\ &= \frac{1}{3} \cdot \sqrt{72}^2 \cdot 3 \\ &= 72\checkmark \end{aligned}$$

d) Zu ermitteln ist der Abstand des Mittelpunktes $M(0|0|4)$ der Kugel von den Seitenflächen, also z.B. von der Ebene F:

Bringe F in die Hesse-Normalform und setze M ein:

$$\begin{aligned}
\left|\vec{n}\right| &= \sqrt{1^2+1^2+2^2} = \sqrt{6}\\
\text{HNF(F):} &\frac{1}{\sqrt{6}}x + \frac{1}{\sqrt{6}}y - \frac{2}{\sqrt{6}}z + \frac{2}{\sqrt{6}}\\
\text{M einsetzen:} &-\frac{2}{\sqrt{6}}\cdot 4 + \frac{2}{\sqrt{6}} = -\frac{6}{\sqrt{6}} = -\sqrt{6}\\
\text{Abstand:} d &= \left|-\sqrt{6}\right| = \sqrt{6}\checkmark\\
\text{Durchmesser:} D &= 2\sqrt{6} \approx 4,9
\end{aligned}$$

Die Kugel hat einen Durchmesser von etwa 49cm.

e) Der Mittelpunkt befindet sich genau 40cm über dem Boden. Dazu kommt noch der Radius also $\sqrt{6}$ dm, das sind etwa 24cm, also in Summe 64 cm

f) Setze die Koordinaten der Fontäne in die Ebenengleichung ein:

$$\begin{aligned}
0 &= 1\cdot(t+1) + 1\cdot(t+1) - 2\cdot(6,2-5\cdot(t-0,2)^2) + 2\\
0 &= 2t + 2 - 12,4 + 10\cdot(t^2 - 0,4t + 0,04) + 2\\
0 &= 2t - 8,4 + 10t^2 - 4t + 0,4\\
0 &= -2t + 10t^2 - 8\\
0 &= 10t^2 - 2t - 8\\
t_{1/2} &= \frac{2 \pm \sqrt{4+320}}{20} = \frac{1}{10} \pm \frac{18}{20}\\
&= 0,1 \pm 0,9 = 1 (\text{t darf nicht kleiner Null sein})
\end{aligned}$$

Es ergibt sich $P(2|2|3)$ als Schnittpunkt der Fontäne mit Ebene F.

g) Die Höhe der Fontäne wird durch die z-Koordinate des Punktes L_t ausgedrückt. Diese wird am größten, wenn der quadratische Term am kleinsten, also Null ist. Dies ist für $t = 0,2$ der Fall. Dann hat die z-Koordinate den Wert 6,2 und dieser liegt unterhalb von 6,4.

h) Zuerst muss man das zu füllende Volumen bestimmen. Dieses besteht aus dem Volumen der Pyramide ohne das Volumen der in ihr liegenden halben Marmorkugel:

$V' = 72 - \frac{2}{3}\cdot\pi\cdot r^3 \approx 72 - 30,78 = 41,22$

Da die Modelllänge 1dm entspricht, beschreibt das Modellvolumen einen $1dm^3$ also 1 Liter:

$t \approx 41,22 : 0,08s = 515,24s$

Es dauert etwa 515 Sekunden.