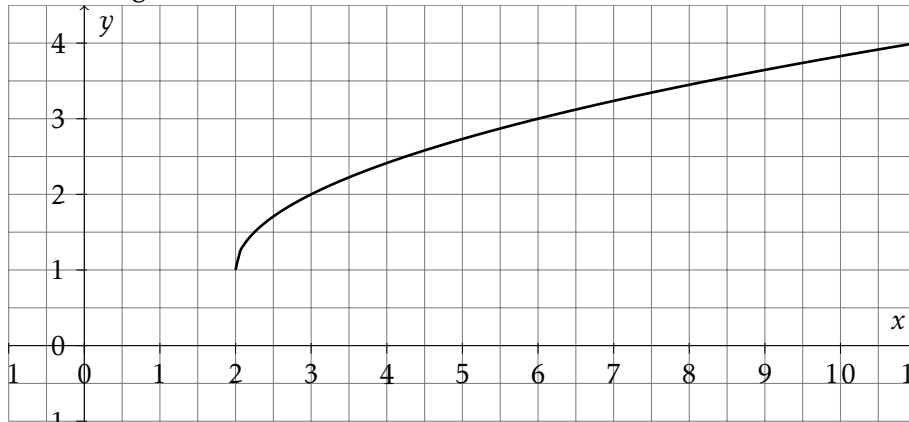


Abi 21 Lsg Ana II

A 1 a) Zeichnung:



b)

$$\begin{aligned}
 \int_2^3 \sqrt{x-2} + 1 dx &= \int_2^3 (x-2)^{\frac{1}{2}} + 1 dx \\
 &= \left[\frac{2}{3} (x-2)^{\frac{3}{2}} + x \right]_2^3 \\
 &= \frac{2}{3} \cdot 1^{\frac{3}{2}} + 3 - \left(\frac{2}{3} \cdot 0^{\frac{3}{2}} + 2 \right) = \frac{2}{3} + 1 = 1\frac{2}{3} \approx 1,67
 \end{aligned}$$

2 a) Da die obere Grenze 1 zum Wertebereich dazugehört bietet sich eine nach unten geöffnete Parabel an:

$$a(x) = 1 - x^2$$

b) Da die untere Grenze 3 nicht im Wertebereich enthalten ist, geht z.B. $b(x) = 3 + e^x$

3 a) Die Tangente ist eine Gerade. Zu bestimmen sind also die Parameter m (Steigung) und t (y-Achsenabschnitt) dieser Geraden. Zur Bestimmung der Steigung m bildet man die Ableitungsfunktion der ganzrationalen Funktion, setzt den x-Wert 2 ein und setzt $m = p'(2)$.

Nun ist nur noch t unbekannt. Man weiß jedoch, dass die Tangente im Punkt $(2|p(2))$ liegt, dieser Punkt liegt also auf der Geraden. Also gilt:

$p(2) = m \cdot 2 + t$ oder $p(2) = f'(2) \cdot 2 + t$. Hier ist nur t unbekannt. Auflösen der Gleichung nach t ergibt die gesuchte Zahl.

b) $h(1) = 0 \Rightarrow a \cdot 1^2 + c = 0 \Rightarrow a = -c$

$$h'(1) = -1 \Rightarrow 2a \cdot 1 = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}, c = \frac{1}{2}$$

- 4 a) Für $x=1$ schneidet G_f die x -Achse. Also ist $f(1) = 0$. Damit ist $g(1)$ nicht definiert.

$$g(-2) = \frac{1}{f(-2)} = \frac{1}{3}$$

- b) Es muss gelten: $f(x) = \frac{1}{f(x)}$ das ist nur für $(f(x))^2 = 1 \quad f(x) = \pm 1$ der Fall.

Aus der Abbildung ergeben sich daher $x \approx 0,6$ und $x \approx 1,3$.

B $f : x \mapsto (1 - x^2) \cdot e^{-x}$

1 a)

$$\begin{aligned}(1 - x^2) \cdot e^{-x} &= 0 \\ (1 - x) \cdot (1 + x) \cdot \underbrace{e^{-x}}_{>0} &= 0 \\ x_1 &= -1 \quad x_2 = +1\end{aligned}$$

b)

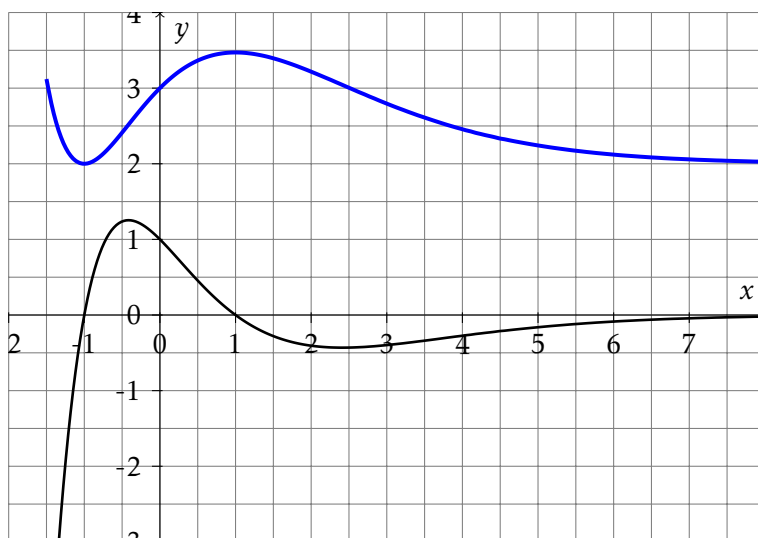
$$\begin{aligned}f'(x) &= -2x \cdot e^{-x} + (1 - x^2) \cdot (-1) \cdot e^{-x} \\ &= e^{-x} \cdot (-2x - (1 - x^2)) \\ &= e^{-x} \cdot (x^2 - 2x - 1) \checkmark \\ 0 &= f'(x) \\ 0 &= \underbrace{e^{-x}}_{>0} \cdot (x^2 - 2x - 1) \\ 0 &= x^2 - 2x - 1 \\ x_{3/4} &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{4 + 4}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2} \\ x_3 &\approx -0,4 \quad x_4 \approx 2,4\end{aligned}$$

c) 6 Kästchen oberhalb, etwa 4 Kästchen unterhalb. Macht in der Summe 2 Kästchen oberhalb. 4 Kästchen entspricht einer FE, also etwa eine halbe FE.

$$\int_{-1}^4 f(x) dx \approx 0,46$$

d) In der Abbildung ist der Graph der Ableitungsfunktion f von F dargestellt. In einer direkten Umgebung sind deren Funktionswerte für $x < -1$ negativ, für $x > -1$ positiv. Somit fällt der Graph von F für $x < -1$ und er steigt für $x > -1$ in unmittelbarer Umgebung von $x = -1$. Das ergibt einen Tiefpunkt bei $x = -1$.

e) Zeichnung:



- f) Der Flächeninhalt, den G_f in $[0;1]$ oberhalb und in $[1;2,5]$ unterhalb der x-Achse einschließt ist genauso groß.
- g) Da e^{-x} nach wie vor positiv ist, kann nur der Term $1 - kx^2$ Null werden:

$$1 - kx^2 = 0, \text{ oder } 1 = k \cdot x^2$$

x^2 ist immer positiv. Die Gleichung ist nicht lösbar, wenn $k = 0$ oder wenn $k < 0$.

Also $k > 0$ zwei Nullstellen, sonst keine Nullstellen.

- h) Berechnung der Nullstellen und des Abstands d allgemein für $k > 0$:

$$(1 - \sqrt{k}x)(1 + \sqrt{k}x) = 0$$

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{k}} \quad x_2 = +\frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$d = x_2 - x_1 = \frac{1}{\sqrt{k}} - \left(-\frac{1}{\sqrt{k}}\right) = \frac{2}{\sqrt{k}}$$

$$4 = \frac{2}{\sqrt{k}}$$

$$\sqrt{k} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$k = \frac{1}{4}$$

$$x_1 = -2 \quad x_2 = +2$$

- i) Gesucht ist also ein k , so dass $h_k(x) = -f(x)$:

$$-f(x) = -(1 - x^2) \cdot e^{-x} = (-1 + x^2) \cdot e^{-x}$$

Mit k lässt sich jedoch nur der Vorfaktor des x^2 beeinflussen, also $k = -1$. Dann wäre jedoch:

$h_{-1}(x) = (1 + x^2) \cdot e^{-x}$, was nicht $-f(x)$ entspricht. Solch ein k kann es nicht geben.

2 a)

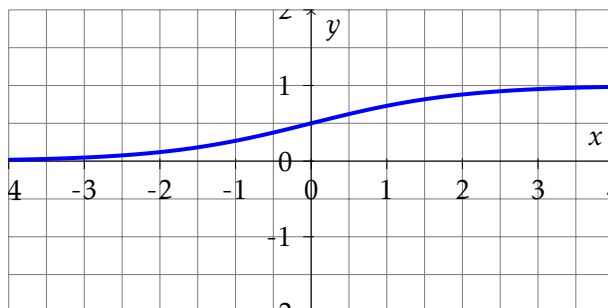
$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{e^x \cdot (e^x + 1) - e^x \cdot e^x}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{e^x \cdot (e^x + 1 - e^x)}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} \checkmark \end{aligned}$$

Sowohl der Zähler als auch der Nenner sind ausschließlich positiv, daher ist der gesamte Term positiv. Daher ist $g(x)$ streng monoton steigend.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\overbrace{e^x}^{\rightarrow 0}}{\underbrace{e^x + 1}_{\rightarrow 1}} &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^x}{e^x}}{\frac{e^x}{e^x} + \frac{1}{e^x}} = 1 \end{aligned}$$

Der Graph steigt also streng zwischen 0 und 1 an.

b) $g'(0) = \frac{1}{4}$



- c) Der Wertebereich umfasst den doppelten Umfang, also muss eine Streckung in y-Richtung mit Faktor 2 stattfinden. In dem Fall wäre der Wertebereich $]0; +2[$, daher muss noch eine Verschiebung um 1 in negativer y-Richtung erfolgen:

$$g^*(x) = 2 \cdot g(x) - 1 = \frac{2e^x}{e^x + 1} - 1$$

- d) Wenn die y-Achse das Flächenstück halbiert, dann muss der Teil im II. Quadranten A_L genauso groß sein wie der Teil im I. Quadranten A_R .

Der Teil im II. Quadranten lässt sich berechnen:

$$\begin{aligned} A_L &= \int_{-\ln 3}^0 \frac{e^x}{e^x + 1} dx \\ &= [\ln(e^x + 1)]_{-\ln 3}^0 \\ &= \ln(e^0 + 1) - \ln(e^{-\ln 3} + 1) = \ln(e^0 + 1) - \ln(e^{\ln(3^{-1})} + 1) \\ &= \ln(2) - \ln(3^{-1} + 1) \\ &= \ln 2 - \ln\left(\frac{4}{3}\right) \approx 0,41 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_R &= A_L = \ln 2 - \ln\left(\frac{4}{3}\right) \\ \ln 2 - \ln\left(\frac{4}{3}\right) &= [\ln(e^x + 1)]_0^b = \ln(e^b + 1) - \ln 2 \\ 2\ln 2 - \ln\left(\frac{4}{3}\right) &= \ln(e^b + 1) \\ \ln 4 - \ln\left(\frac{4}{3}\right) &= \ln(e^b + 1) \\ \ln\left(\frac{4}{\frac{4}{3}}\right) &= \ln(e^b + 1) \\ \frac{4}{\frac{4}{3}} &= e^b + 1 \\ 4 \cdot \frac{3}{4} &= e^b + 1 \\ 3 - 1 &= e^b \\ \ln 2 &= b \end{aligned}$$