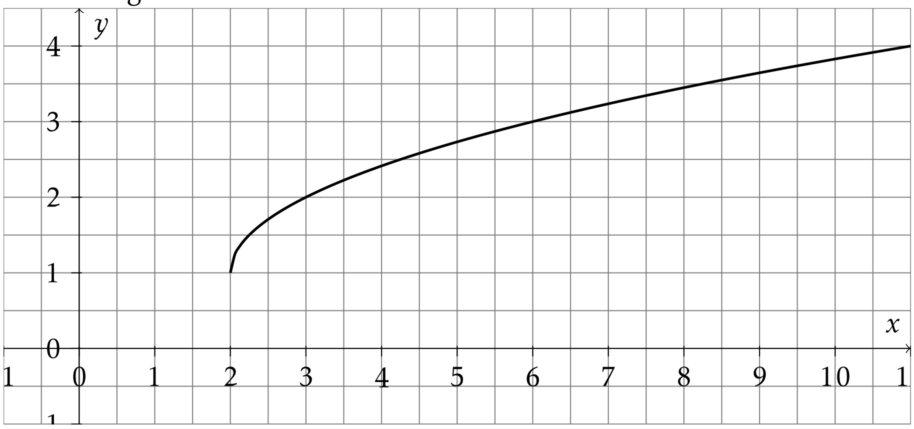
Abi 21 Lsg Ana II

A 1 a) Zeichnung:



b)

$$\int_2^3 \sqrt{x-2}+1dx = \int_2^3 (x-2)^{\frac{1}{2}}+1dx$$
$$= \left[\frac{2}{3}(x-2)^{\frac{3}{2}}+x\right]_2^3$$
$$= \frac{2}{3}\cdot 1^{\frac{3}{2}}+3-\left(\frac{2}{3}\cdot 0^{\frac{3}{2}}+2\right) \qquad = \frac{2}{3}+1 = 1\frac{2}{3} \approx 1,67$$

2 a) Da die obere Grenze 1 zum Wertebereich dazugehört bietet sich eine nach unten geöffnete Parabel an:
$a(x) = 1 - x^2$

b) Da die untere Grenze 3 nicht im Wertebereich enthalten ist, geht z.B. $b(x) = 3 + e^x$

3 a) Die Tangente ist eine Gerade. Zu bestimmen sind also die Parameter m (Steigung) und t (y-Achsenabschnitt) dieser Geraden. Zur Bestimmung der Steigung m bildet man die Ableitungsfunktion der ganzrationalen Funktion, setzt den x-Wert 2 ein und setzt m = p'(2).
Nun ist nur noch t unbekannt. Man weiß jedoch, dass die Tangente im Punkt (2|p(2)) liegt, dieser Punkt liegt also auf der Geraden. Also gilt:
$p(2) = m \cdot 2 + t$ oder $p(2) = f'(2) \cdot 2 + t$. Hier ist nur t unbekannt. Auflösen der Gleichung nach t ergibt die gesuchte Zahl.

b) $h(1) = 0 \Rightarrow a \cdot 1^2 + c = 0 \Rightarrow a = -c$

$h'(1) = -1 \Rightarrow 2a \cdot 1 = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}, c = \frac{1}{2}$

4 a) Für x =1 schneidet G_f die x-Achse. Also ist $f(1) = 0$. Damit ist $g(1)$ nicht definiert.

$g(-2) = \frac{1}{f(-2)} = \frac{1}{3}$

b) Es muss gelten: $f(x) = \frac{1}{f(x)}$ das ist nur für $(f(x))^2 = 1 \quad f(x) = \pm 1$ der Fall.

Aus der Abbildung ergeben sich daher $x \approx 0,6$ und $x \approx 1,3$.

B $f : x \mapsto (1-x^2) \cdot e^{-x}$

1 a)

$$\begin{aligned} (1-x^2) \cdot e^{-x} &= 0 \\ (1-x) \cdot (1+x) \cdot \underbrace{e^{-x}}_{>0} &= 0 \\ x_1 = -1 \quad x_2 &= +1 \end{aligned}$$

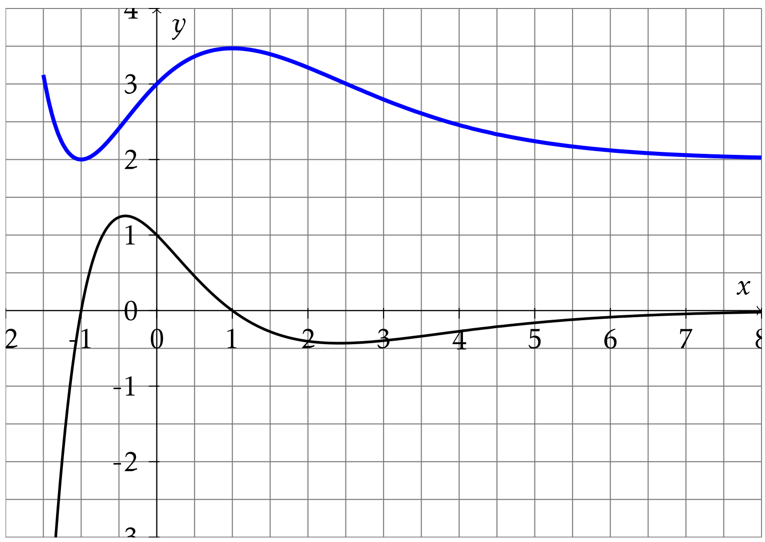
b)

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2x \cdot e^{-x} + (1-x^2) \cdot (-1) \cdot e^{-x} \\ &= e^{-x} \cdot \left(-2x - (1-x^2)\right) \\ &= e^{-x} \cdot \left(x^2 - 2x - 1\right) \checkmark \\ 0 &= f'(x) \\ 0 &= \underbrace{e^{-x}}_{>0} \cdot \left(x^2 - 2x - 1\right) \\ 0 &= x^2 - 2x - 1 \\ x_{3/4} &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2} \\ x_3 &\approx -0,4 \quad x_4 \approx 2,4 \end{aligned}$$

c) 6 Kästchen oberhalb, etwa 4 Kästchen unterhalb. Macht in der Summe 2 Kästchen oberhalb. 4 Kästchen entspricht einer FE, also etwa eine halbe FE. $\int\limits_{-1}^{4} f(x)dx \approx 0,46$

d) In der Abbildung ist der Graph der Ableitungsfunktion f von F dargestellt. In einer direkten Umgebung sind deren Funktionswerte für $x < -1$ negativ, für $x > -1$ positiv. Somit fällt der Graph von F für $x < -1$ und er steigt für $x > -1$ in unmittelbarer Umgebung von $x = -1$. Das ergibt einen Tiefpunkt bei $x = -1$.

e) Zeichnung:



f) Der Flächeninhalt, den G_f in $[0;1]$ oberhalb und in $[1;2,5]$ unterhalb der x-Achse einschließt ist genauso groß.

g) Da e^{-x} nach wie vor positiv ist, kann nur der Term $1-kx^2$ Null werden:

$1-kx^2=0$, oder $1=k\cdot x^2$

x^2 ist immer positiv. Die Gleichung ist nicht lösbar, wenn $k=0$ oder wenn $k<0$.

Also $k>0$ zwei Nullstellen, sonst keine Nullstellen.

h) Berechnung der Nullstellen und des Abstands d allgemein für $k>0$:

$$(1-\sqrt{k}x)(1+\sqrt{k}x)=0$$
$$x_1=-\frac{1}{\sqrt{k}} \quad x_2=+\frac{1}{\sqrt{k}}$$
$$d=x_2-x_1=\frac{1}{\sqrt{k}}-(-\frac{1}{\sqrt{k}})=\frac{2}{\sqrt{k}}$$
$$4=\frac{2}{\sqrt{k}}$$
$$\sqrt{k}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$
$$k=\frac{1}{4}$$
$$x_1=-2 \quad x_2=+2\checkmark$$

i) Gesucht ist also ein k, so dass $h_k(x)=-f(x)$:

$-f(x) = -(1-x^2) \cdot e^{-x} = (-1+x^2) \cdot e^{-x}$

Mit k lässt sich jedoch nur der Vorfaktor des x^2 beeinflussen, also $k = -1$. Dann wäre jedoch:

$h_{-1}(x) = (1+x^2) \cdot e^{-x}$, was nicht $-f(x)$ entspricht. Solch ein k kann es nicht geben.

2 a)

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{e^x \cdot (e^x+1) - e^x \cdot e^x}{(e^x+1)^2} \\ &= \frac{e^x \cdot (e^x+1-e^x)}{(e^x+1)^2} \\ &= \frac{e^x}{(e^x+1)^2} \checkmark \end{aligned}$$

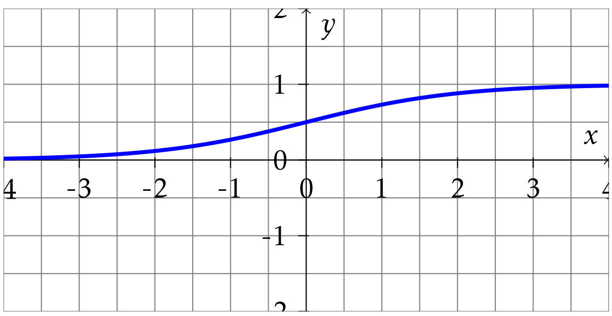
Sowohl der Zähler als auch der Nenner sind ausschließlich positiv, daher ist der gesamte Term positiv. Daher ist $g(x)$ streng monoton steigend.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\overbrace{e^x}^{\to 0}}{\underbrace{e^x+1}_{\to 1}} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{e^x}{e^x}}{\frac{e^x}{e^x}+\frac{1}{e^x}} = 1$$

Der Graph steigt also streng zwischen 0 und 1 an.

b) $g'(0) = \frac{1}{4}$



c) Der Wertebereich umfasst den doppelten Umfang, also muss eine Streckung in y-Richtung mit Faktor 2 stattfinden. In dem Fall wäre der Wertebereich]0;+2[, daher muss noch eine Verschiebung um 1 in negativer y-Richtung erfolgen:

$g^*(x) = 2 \cdot g(x) - 1 = \frac{2e^x}{e^x+1} - 1$

d) Wenn die y-Achse das Flächenstück halbiert, dann muss der Teil im II.Quadranten A_L genauso groß sein wie der Teil im I.Quadranten A_R.

Der Teil im II. Quadranten lässt sich berechnen:

$$\begin{aligned}
A_L &= \int_{-ln3}^{0} \frac{e^x}{e^x+1} dx \\
&= [ln(e^x+1)]_{-ln3}^{0} \\
&= ln(e^0+1) - ln(e^{-ln3}+1) = ln(e^0+1) - ln(e^{ln(3^{-1})}+1) \\
&= ln(2) - ln(3^{-1}+1) \\
&= ln2 - ln(\frac{4}{3}) \approx 0,41
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_R = A_L &= ln2 - ln(\frac{4}{3}) \\
ln2 - ln(\frac{4}{3}) &= [ln(e^x+1)]_0^b = ln(e^b+1) - ln2 \\
2ln2 - ln(\frac{4}{3}) &= ln(e^b+1) \\
ln4 - ln(\frac{4}{3}) &= ln(e^b+1) \\
ln\left(\frac{4}{\frac{4}{3}}\right) &= ln(e^b+1) \\
\frac{4}{\frac{4}{3}} &= e^b+1 \\
4 \cdot \frac{3}{4} &= e^b+1 \\
3-1 &= e^b \\
ln2 &= b
\end{aligned}$$