Abi 21 Lsg Ana I

A 1 $f(x) = e^{2x+1}$

Die Funktion ist umkehrbar, wenn sie streng monoton ist.

$f'(x) = e^{2x+1} \cdot 2 = 2e^{2x+1} > 0$

$f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ ist streng monoton steigend, also umkehrbar.

Term der Umkehrfunktion:

$$\begin{aligned} y &= e^{2x+1} \\ x &= e^{2y+1} \\ ln(x) &= 2y + 1 \\ ln(x) - 1 &= 2y \\ \frac{ln(x) - 1}{2} &= y = f^{-1}(x) \end{aligned}$$

2 a) $(x^2 - 9x) \cdot \sqrt{2 - x}$

Der erste Faktor ist eine ganzrationale Funktion, keine Einschränkungen der Definitionsmenge.

Im zweiten Faktor befindet sich der Radikand $2 - x$, der nicht negativ werden darf:

$2 - x \geq 0 \Rightarrow 2 \geq x \qquad D_g =]-\infty; +2]$

Der Term ist Null, wenn einer seiner Faktoren Null ist:

$x^2 - 9x = x \cdot (x - 9) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \qquad x_2 = 9$ - nicht in D_g enthalten!

$2 - x = 0 \Rightarrow x = 2$

Nullstellen: $\left\{ {x \in \atop 0; 2\}} \right\}$

b) Die ln-Funktion ist streng monoton steigend.

Das Argument $A(x) = \frac{1}{x^2+1}$ hat als Nenner die Funktion $x^2 + 1$. Das ist eine quadratische Funktion. Ihr Graph ist eine nach oben geöffnete um 1 in positiver y-verschobene Normalparabel. Ihr Scheitelpunkt/Tiefpunkt liegt bei

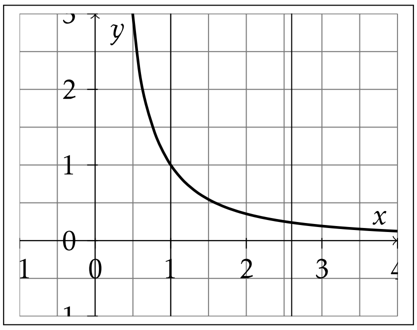
(0|1). Also nimmt der Nenner bei x=0 seinen kleinsten Wert y=1 an. Also nimmt das Argument des Logarithmus bei x=0 mit $y = \frac{1}{1}$ seinen größten Wert an. Mit zunhemendem Betrag von x unterschreitet der Wert des Bruchs jede beliebige Zahl nahe Null.

Der Wertebereich von $A(x)$ ist also $]0;1]$. Wegen der Monotonie der ln-Funktion ist der Wertebereich von h also in $]-\infty; ln(1)]$.

3 a) $F(x) = -\frac{2}{\sqrt{x}} = -2 \cdot x^{-\frac{1}{2}}$

$F'(x) = -2 \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot x^{-1,5} = x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$ ✓

b) Bestimmtes Integral:



$$\int_1^b f(x)dx = 1$$

$$\left[-\frac{2}{\sqrt{x}}\right]_1^b = 1$$

$$-\frac{2}{\sqrt{b}} + 2 = 1$$

$$-\frac{2}{\sqrt{b}} = -1$$

$$\frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{b} = 2$$

$$b_{1/2} = \pm 4$$

$$b > 1 \Rightarrow b = 4$$

4 a)

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 - f(a)}{0 - a}$$
$$= \frac{2 - \frac{1}{8}a^3}{-a} = \frac{16 - a^3}{-8a} = \frac{a^3 - 16}{8a} \checkmark$$

b) Ansatz:

$$\begin{aligned}
m_a &= f'(a)\\
\frac{a^3-16}{8a} &= \frac{3}{8}a^2\\
a^3-16 &= \frac{3}{8}a^2\cdot 8a\\
a^3-16 &= 3\cdot a^3\\
-16 &= 2a^3\\
a^3 &= -8 \Rightarrow a=-2
\end{aligned}$$

B $f : x \mapsto \frac{x^2-1}{x^2+1}$

1 a) Der Nenner ist $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$. Also wird der Nenner Null, wenn $x = -2$ oder $x = 2$.

Senkrechte Asymptoten: $x = -2 \qquad x = +2$.

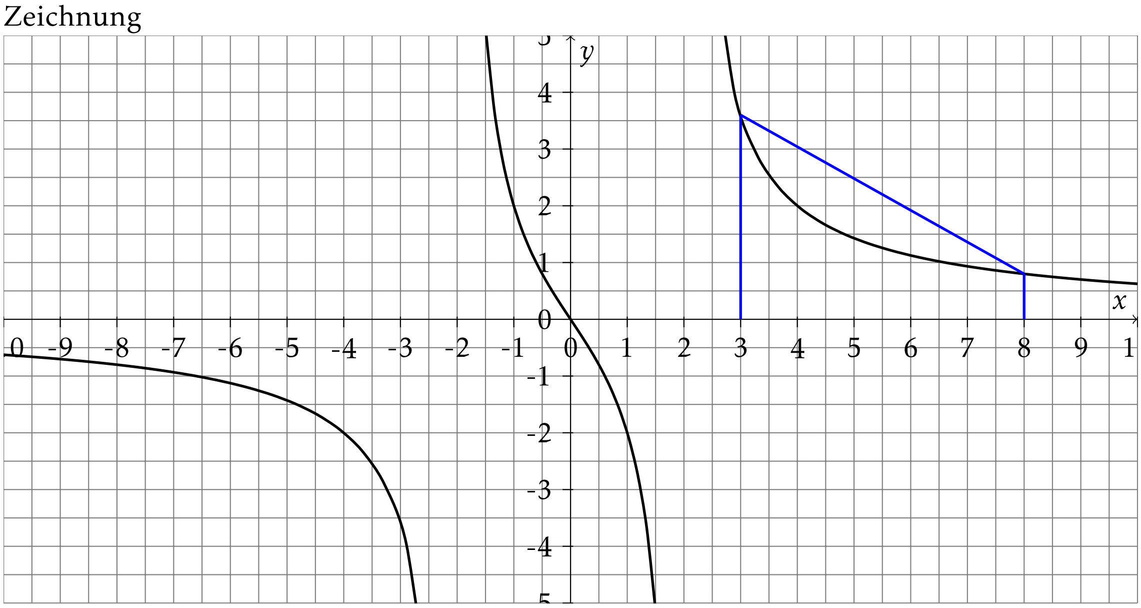
Der Nennergrad ist größer als der Zählergrad. Daher wächst der Nenner schneller als der Zähler. Daher geht der Wert des Bruchs für große Zahlen gegen Null. Deshalb ist die x-Achse eine waagerechte Asymptote für den Graphen von f.

b) Zur Untersuchung des Monotonieverhaltens:

$$f'(x) = \frac{6\cdot(x^2-4) - 6x\cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{6\cdot(x^2-2x^2-4)}{(x^2-4)^2}$$
$$= -6\cdot\frac{x^2+4}{(x^2-4)^2} \checkmark$$

Steigung bei x=0: $f'(0) = -6\cdot\frac{4}{4^2} = -\frac{6}{4} = -1,5$
Die Ableitung hat keine Nullstellen. Zähler und Nenner sind immer positiv, der Vorfaktor ist immer negativ. Also hat die Ableitungsfunktion nur negative Wert, der Graph ist im gesamten Definitionsbereich streng monoton fallend.

c) Zeichnung



d) Inhalt des blauen Trapezes: $A_T = \frac{1}{2}\cdot(3,6+0,8)\cdot 5 = 11$ Fläche zwischen G_f und x-Achse:

$$\int_3^8 \frac{6x}{x^2-4}dx = 3\int_3^8 \frac{2x}{x^2-4}dx = [3 \cdot ln(x^2-4)]_3^8$$
$$= 3ln(64-4) - 3ln(9-4) = 3ln60 - 3ln5 \approx 7,45$$
$$A_D \approx 11 - 7,45 = 3,25$$

2 a) $a = 6, b = 0, c = 4$

b) $a = 0, b \neq 0 : f_{b,c} = \frac{b}{x^2+c}$. Der Term enthält nu gerade Potenzen von x (x^2 und x^0). Setzt man also (-x) ein, so ergibt sich der gleiche Wert wie beim Einsetzen von (+x).

Die x-Achse wird nicht geschnitten, da der Zähler ein Konstante ist, die nicht Null ist.

c) Für die Punktsymmetrie muss gelten $f(-x) = -f(x)$:

$$\frac{a \cdot (-x) + b}{(-x)^2 + c} = -\frac{ax+b}{x^2+c}$$
$$\frac{-ax+b}{x^2+c} = -\frac{ax+b}{x^2+c}$$
$$-ax + b = -(ax+b)$$
$$-ax + b = -ax - b$$
$$\Rightarrow b = 0, a \neq 0$$

d) Nullstellen sind Nullstellen des Zählers. Also muss $ax^2 + 2bx - ac$ genau zwei Nullstellen besitzen. Dabei handelt es sich um eine quadratische Gleichung. Eine quadratische Gleichung hat zwei Nullstellen, wenn ihre Diskriminante größer Null ist:

$Ax^2 + Bx + C = 0$ hat zwei Nullstellen wenn $D = B^2 - 4AC > 0$.

In diesem Fall gilt: $A = a \quad B = 2b \quad C = -ac$

$D = (2b)^2 - 4 \cdot a \cdot (-ac) = 4b^2 + 4a^2c = 4 \cdot (b^2 + a^2 \cdot c) > 0$

Wenn $a \neq 0$ (quadratische Gleichung) und $c > 0$ dann ist diese Bedingung sicher erfüllt, denn dann ist $b^2 + a^2 \cdot c > 0$.

3 a) Der Graph ist um 12 nach rechts verschoben und mit 8 in y-Richtung gestreckt. Da h(x) achsensymmetrisch zur y-Achse ist, ist p(x) achsensymmetrisch zu x = 12.

b)

$$
\begin{aligned}
0,4 \cdot 10 &= 4 \\
p(x) &= 4 \\
\frac{40}{(x-12)^2+4} &= 4 \\
\frac{10}{(x-12)^2+4} &= 1 \\
10 &= (x-12)^2 + 4 \\
0 &= x^2 - 24x + 138 \\
x_{1/2} &= \frac{24 \pm \sqrt{576 - 4 \cdot 1 \cdot 138}}{2} = \frac{24 \pm 2\sqrt{6}}{2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{6}
\end{aligned}
$$

$$x_2 \approx 14,45$$

$$0,45 \cdot 60 = 27$$

Etwa um 14:27.

c) Im entsprechenden Zeitpunkt ist die Leistungszunahme maximal.

d) Wenn man den Verlauf von 10 bis 12 linear annähert, erhält man ein Trapez mit a = 5, c = 10 und h = 2. $A_T = 7,5 \cdot 2 = 15$ für den Vormittag und das gleiche für den Nachmittag.

Also werden im betrachteten Zeitraum 30 kWh ins Netz eingespeist. Macht bei einer Vergütung von 10Cent 3 Euro für den fraglichen Zeitraum.