Abi 20 Lsg Ana I

A 1 a) $h : x \mapsto x \cdot ln\left(x^2\right)$

Zur Bestimmung von D_h: Das Argument der ln-Funktion muss positiv sein, also $x^2 > 0$. Das gilt für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$h'(x) = 1 \cdot ln(x^2) + x \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x = ln(x^2) + 2 \quad \checkmark$

b) $h'(x) = 0$

$ln(x^2) + 2 = 0$

$2 \cdot lnx = -2$

$lnx = -1$

$x_1 = e^{-1}$

Wegen der Achsensymmetrie gilt $h(-x) = h(x)$.

Also $x_2 = -e^{-1}$.

$h(-e^{-1}) = -\frac{1}{e} \cdot ln((-e^{-1})^2) = -\frac{1}{e} \cdot ln(e^{-2}) = \frac{2}{e} \approx 0,74$

HOP$(-\frac{1}{e}|\frac{2}{e})$

2 a) Aus den waagerechten Tangenten der Ableitungsfunktion ergeben sich zwei Nullstellen der zweiten Ableitung. Da die waagerechte Tangente im III. Quadranten ein Terrassenpunkt ist, besitzt die Steigung der Ableitungsfunktion davor und danach das gleiche Vorzeichen. Daher ist die Krümmung zwar bei $x = -4$ 0, der Graph von f ist jedoch davor und danach gleichgekrümmt, also handelt es sich dort nicht um einen Wendepunkt.

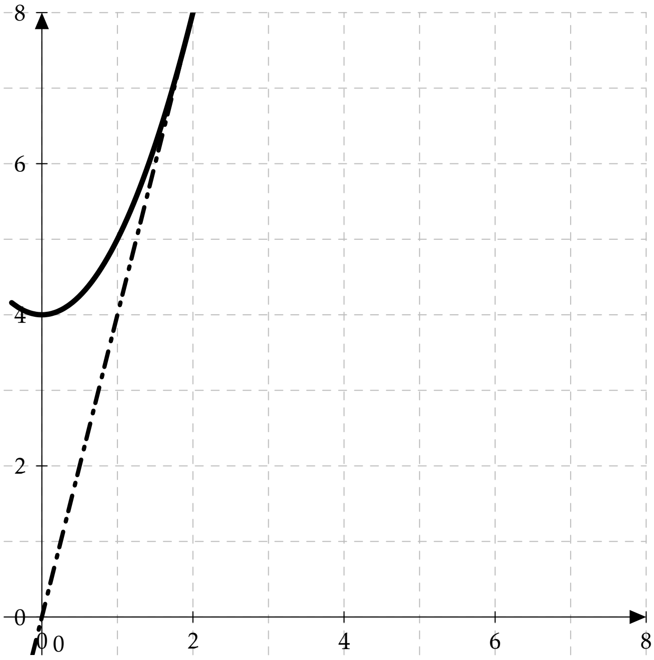
Im Gegensatz dazu wechselt die Steigung der Ableitungsfunktion bei $x = 5$ das Vorzeichen, also wechselt die Krümmung von G_f das Vorzeichen, also handelt es sich dort um einen Wendepunkt.

b) Steigung der Winkelhalbierenden: $m = +1$.

Suche also Stellen, an denen der dargestellte Graph der Ableitungsfunktion den Wert +1 besitzt.

Dies ist ungefähr bei $x = 2$ und $x = 7$ der Fall.

3 a) Skizze:



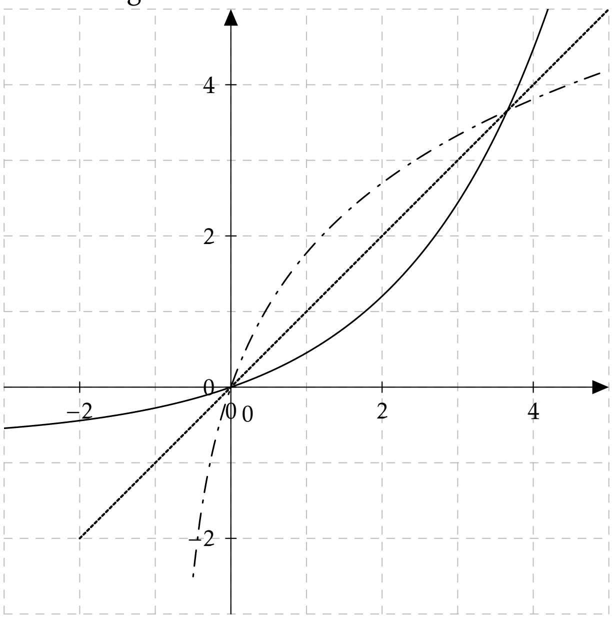
b) $x^2 + 4 = m \cdot x$

$x^2 - mx + 4 = 0$

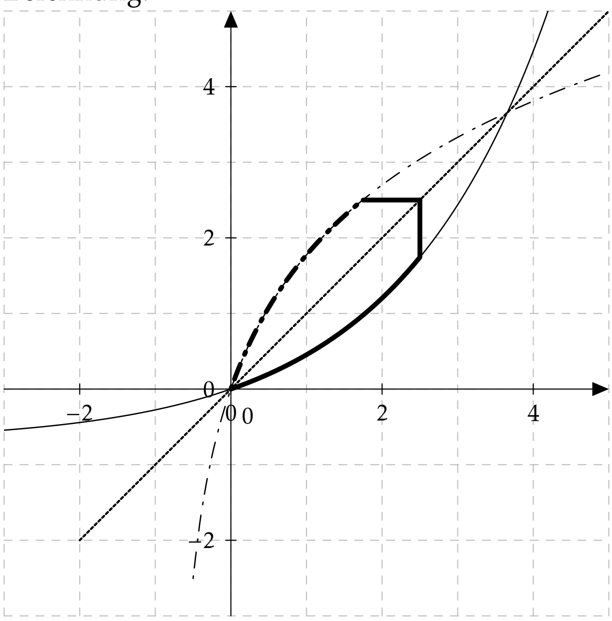
Diskriminante: $D = b^2 - 4ac = m^2 - 16 < 0 \Rightarrow |m| < 4$

Für Werte von von m zwischen -4 und +4 gibt es keinen Schnittpunkt der Geraden mit der Parabel.

4 a) Zeichnung:



b) Zeichnung:



c) $\int x - \left(0,7 \cdot e^{0,5x} - 0,7\right) dx = \frac{x^2}{2} - 1,4 \cdot e^{0,5x} + 0,7x + C$

Eine Stammfunktion ist also z.B. : $\frac{x^2}{2} - 1,4 \cdot e^{0,5x} + 0,7x + 2020$

B $f : x \mapsto \frac{x^2-1}{x^2+1}$

1 a) Symmetrie bezüglich der y-Achse: Setze $-x$ in den Funktionsterm ein.

Mit der Eigenschaft $(-x)^2 = (-x)\cdot(-x) = +x^2$ ergibt sich:

$f(-x) = \frac{(-x)^2-1}{(-x)^2+1} = \frac{x^2-1}{x^2+1} = f(x)$ ✓ Achsensymmetrie.

Verhalten am rechten Rand:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\overbrace{\frac{1}{x^2}}^{\to 0}}{1+\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}} = 1$$

Funktionswert bei 0,96:

$$\begin{aligned} 0,96 &= \frac{x^2-1}{x^2+1} \\ 0,96\cdot(x^2+1) &= x^2-1 \\ 0,96x^2+0,96 &= x^2-1 \\ 1,96 &= 0,04x^2 \\ 49 &= x^2 \\ x_{1/2} &= \pm 7 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x\cdot(x^2+1)-(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{2x^3+2x-2x^3+2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{4x}{(x^2+1)^2} \quad \checkmark \\ f'(x) &= 0 \\ \frac{4x}{(x^2+1)^2} &= 0 \\ 4x &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

VZT	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x$
$f'(x)$	-	0	+
G_f	↘	TIP	↗

c) $x_P = 3 \qquad y_P = f(3) = \frac{3^2-1}{3^2+1} = \frac{8}{10} = 0,8$

$m = f'(3) = \frac{4\cdot 3}{100} = 0,12$

Bestimmung des y-Achsenabschnitts:

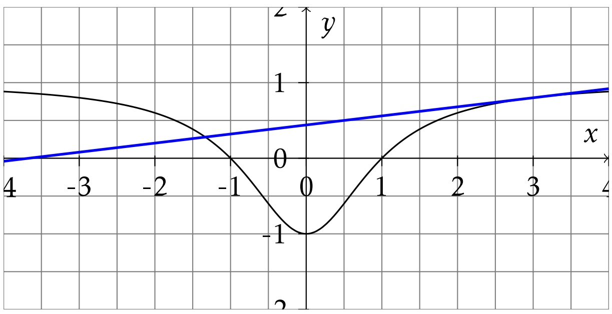
$0,8 = 0,12 \cdot 3 + t \Rightarrow t = 0,8 - 0,36 = 0,44$

Gleichung der Tangente:

$y = 0,8x0,44$

Winkel mit der x-Achse:

$tan(\alpha) = 0,12 \Rightarrow \alpha \approx 6,84^o$



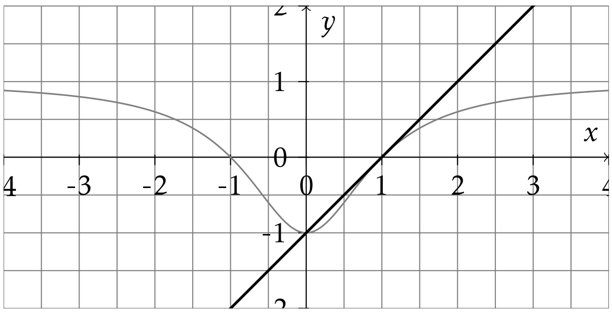
2 $F : x \mapsto \int_0^x f(t)dt$

a) Für $x = 0$ ergibt sich $\int_0^0 f(t)dt$ also ein Integral, dessen untere und obere Grenze übereinstimmen, also ein Flächeninhalt mit der Breite 0. Daher gilt: $F(0) = 0$.

Zwischen 0 und 1 werden negativ orientierte Flächeninhalte summiert, der Wert des Integrals erreicht bei x=1 seinen kleinsten Wert. Ab x=1 kommen nur positiv orientierte Flächen hinzu, der Wert des gesamten Integrals steigt also dauerhaft an. Daher muss er die x-Achse schneiden. Der Schnittpunkt liegt dort, wo der positiv orientierte Flächeninhalt genauso groß ist, wie der negativ orientierte, also im Intervall zwischen 2 und 3.

G_F hat bei $x = -1$ ein Maximum, da $f(x) = F'(x)$ einen Vorzeichenwechsel von + nach - hat, G_F also erst steigt und dann fällt.

b) $x-1$ im Koordinatensystem:



Es handelt sich um die Winkelhalbierende, die um 1 nach unten verschoben ist. Dabei ensteht ein Dreieck mit den Punkten $(0|0), (1|0), (0|-1)$. Der absolute Flächeninhalt beträgt: $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$

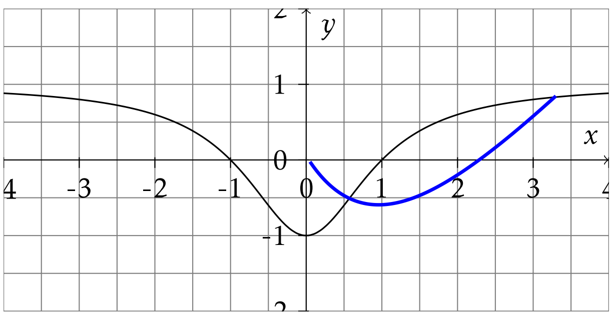
Da der Graph unterhalb der x-Achse verläuft ergibt sich $A = -\frac{1}{2}$

Da dieser Graph grob dem Verlauf von G_f in $[0;1]$ entspricht, wird $\int\limits_0^1 f(x)dx = F(1)$ ungefähr genauso groß sein.

c) Der Graph von g geht durch Stauchung mit $\frac{\pi}{2}$ in x-Richtung und Spiegelung an der x-Achse aus dem Graphen der Kosinusfunktion hervor.

$$\int\limits_0^1 -cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) dx = \left[-sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) \cdot \frac{2}{\pi}\right]_0^1$$
$$= -\frac{2}{\pi} - (-0) = -\frac{2}{\pi}$$

Arithmetisches Mittel: $\frac{2}{\pi} \approx 0,64 \Rightarrow \bar{A} \approx \frac{1}{2} \cdot (0,64 + 0,5) = 0,58$



3 a) $f(2) = \frac{2^2-1}{2^2+1} = \frac{3}{5} = 0,6$

Höhe des Dreiecks: $y_R - f(2) = 1 - 0,6 = 0,4$

$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 0,4 = 0,8$

$A(k) = \frac{1}{2} \cdot 2k \cdot (1 - f(k)) = k \cdot \left(1 - \frac{k^2-1}{k^2+1}\right) = k \cdot \left(\frac{k^2+1}{k^2+1} - \frac{k^2-1}{k^2+1}\right) = k \cdot \frac{2}{k^2+1}$ ✓

b) $A'(k) = \frac{2(k^2+1)-2k \cdot 2k}{(k^2+1)^2} = \frac{2k^2+2-4k^2}{(k^2+1)^2} = \frac{-2k^2+2}{(k^2+1)^2} = -2 \cdot \frac{k^2-1}{(k^2+1)^2}$

Extremum: $A'(k) = 0$

$k^2 - 1 = 0 \Rightarrow k = 1$ einzige Lösung für $k > 0$

Maximaler FI: $A(1) = 1 \cdot \frac{2}{1^2+1} = \frac{2}{2} = 1$