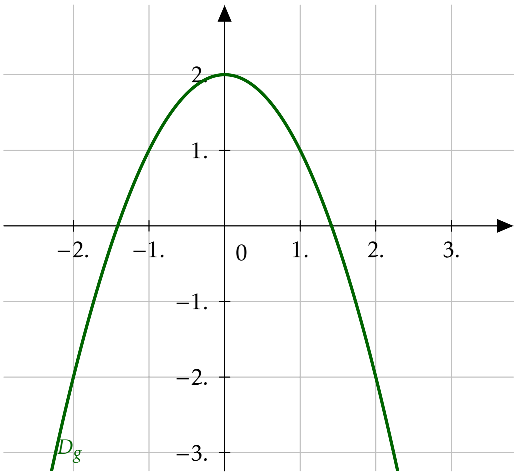
Abi 20 Lsg Ana II

A 1 Funktion g:

a) Definitionsbereich: $D_g =]-\sqrt{2};+\sqrt{2}[$

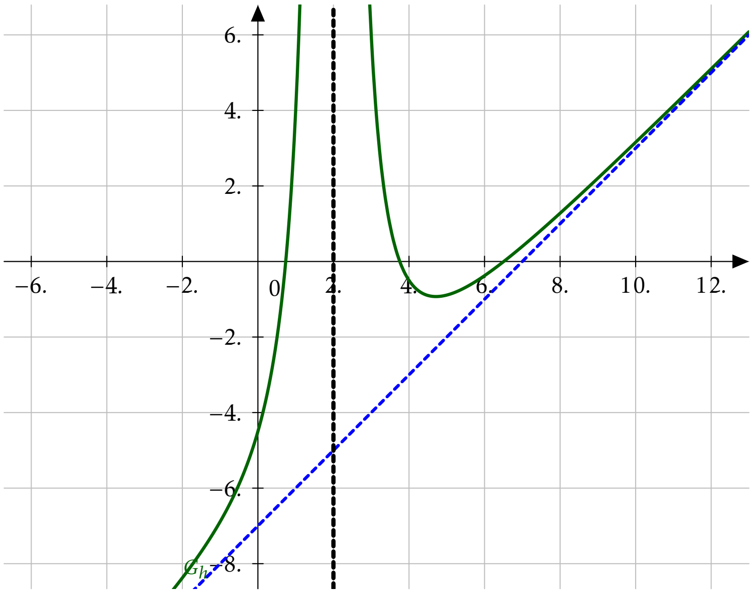
Quadratische Funktion:



b) $g'(x) = \frac{-2x}{2-x^2}$

2 Funktion h ohne Term

a) Grafik:



b) $\int\limits_{10}^{20} h(x)dx = \int\limits_{10}^{20} x - 7dx = \left[\frac{x^2}{2} - 7x\right]_{10}^{20}$

$\frac{400}{2} - 140 - (\frac{100}{2} - 70) = 60 - (-20) = 80$

3 Gebrochen rationale Funktion

a) Nullstellen sind die Nullstellen des Zählers:

$-x^2 + 2x = 0$ faktorisieren:

$x(-x+2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = 2$

Division durch die höchste Potenz des Nenners ergibt:

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{-1+\frac{2}{x}}{2+\frac{4}{x^2}} = \frac{-1}{2} \quad \checkmark$

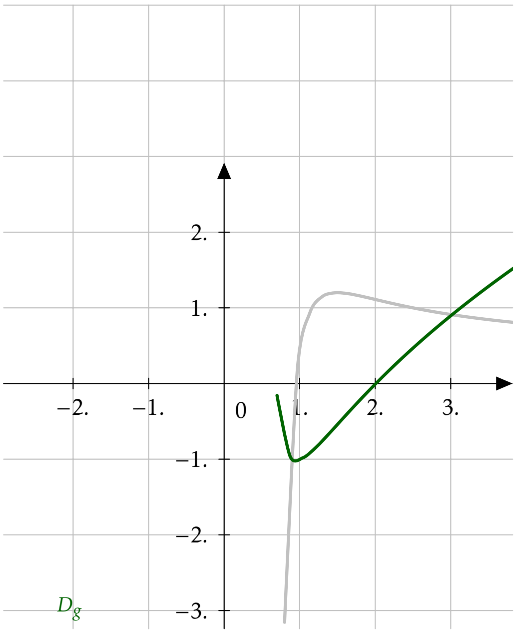
b) $\frac{-x^2+2x}{2x^2+4} = -0,5$ Multiplikation mit dem Nenner

$-x^2 + 2x = -0,5 \cdot (2x^2 + 4)$

$-x^2 + 2x = -x^2 - 2$

$2x = -2 \Rightarrow x = -1$

4 Der im Intervall betrachtete Flächeninhalt zwischen Graph und x-Achse beträgt etwa 4 Kästchen, also eine Flächeneinheit. Da in negativer x-Richtung integriert wird muss der Inhalt negativ gerechnet werden.



B 1 $f(x) = 1 + 7e^{-0,2x}$

a) $\lim\limits_{x\to\infty} 1 + \underbrace{7e^{-0,2x}}_{\to 0} = 1$

2 a) $A(0) = \frac{8}{1+7\cdot 1} = \frac{8}{8} = 1$

Der Algenteppich besitzt anfangs einen Flächeninhalt von einem Quadratmeter.
$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{8}{1+7\cdot \underbrace{e^{-0.2x}}_{\to 0}} = \frac{8}{1} = 8$

Im Laufe der Zeit kommt der Flächeninhalt dem Inhalt 8 Quadratmeter beliebig nahe.
$f(x)$ ist streng monoton fallend. Bei $A(x)$ ist der Zähler konstant und $f(x)$ steht im Nenner. Da mit wachsendem x die Werte im Nenner abnehmen ist der ganze Quotient $A(x)$ streng monoton steigend.

b) $A'(x) = [\frac{8}{f(x)}]' = -\frac{8}{(f(x))^2} \cdot f'(x)$

$f'(0) = -1,4 \Rightarrow A(0) = -\frac{8}{8^2} \cdot (-1,4) = 0,175$

Die momentane Wachstumsrate des Teppichs beträgt anfangs 0,175 Quadratmeter pro Tag.

c) $4 = \frac{8}{1+7e^{-0.2x}}$

$1 = \frac{2}{1+7e^{-0.2x}}$

$1 + 7e^{-0.2x} = 2$

$7e^{-0.2x} = 1$

$e^{-0.2x} = \frac{1}{7}$

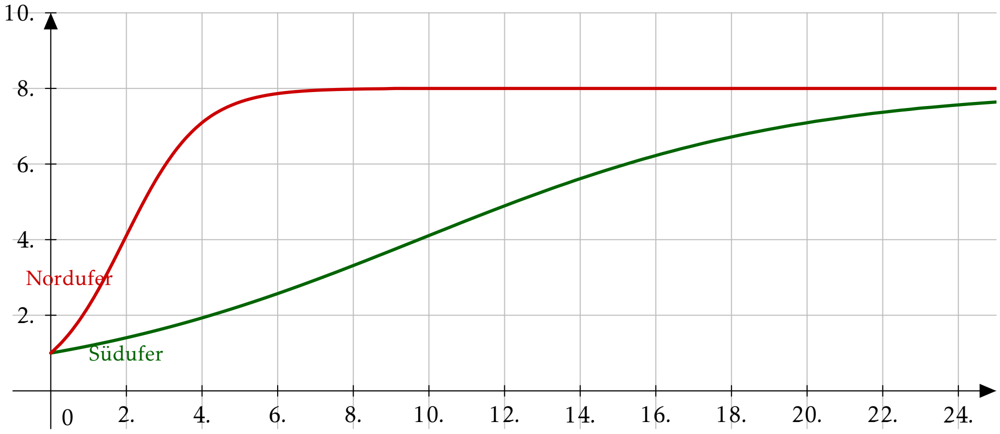
$-0.2x = ln(\frac{1}{7})$

$x = -5 \cdot (-ln(7))$

$x = 5ln(7) \approx 9,7$

Nach 9,7 Tagen nimmt der Algenteppich eine Fläche von 4 Quadratmetern ein.

d) Dort befindet sich ein Wendepunkt, da die zweite Ableitung die Ableitung der ersten Ableitung ist. Die erste Ableitung hat ein ein Maximum (Steigung nimmt bis dort zu, danach ab). Also hat die zweite Ableitung eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel, also einen Wechsel der Krümmung.

e) 

f) Setze statt 0.2 den Parameter k. Es gilt $e^{-k \cdot 0} = 1$. Also $A_k(0) = 1$.

Es gilt $\lim\limits_{x \to \infty} e^{-kx} = 0$. Also $\lim\limits_{x \to \infty} A_k(x) = 8$ unabhängig von k.

$A_k'(0) = \frac{56k}{64} = k \cdot \frac{56}{64}$. Die Ableitung in 0 ist also proportional zu k. Also ist die momentane Änderungsrate am Nordufer zum Zeitpunkt $t = 0$ größer.