

## Abi 18 Lsg Geo I

A 1 Kugel mit Mittelpunkt  $M(1|4|0)$  und Radius 6.

a) Der Abstand des Punktes  $P(5|1|p)$  muss 6 zum Mittelpunkt betragen:

$$6 = |\vec{MP}| = \left| \begin{pmatrix} 5-1 \\ 1-4 \\ p-0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4^2 + (-3)^2 + p^2}$$
$$36 = 16 + 9 + p^2 \Rightarrow p^2 = 11 \quad p_{1/2} = \pm\sqrt{11}$$

b) Der Verbindungsvektor vom Kugelmittelpunkt zum Punkt B auf der Kugel muss senkrecht auf dem Richtungsvektor der gesuchten Geraden stehen (die Gerade berührt die Kugel, ist also Tangente).

$$\vec{MB} = \vec{B} - \vec{M} = \begin{pmatrix} -3-1 \\ 8-4 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Jeder Vektor, der auf diesem Vektor senkrecht steht kann Richtungsvektor der Geraden sein.

$$\text{z.B. } \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ denn } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-4) + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 = 0$$

Damit ist ein Richtungsvektor der Geraden festgelegt, als Aufpunkt kann man B verwenden, denn B muss in jedem Fall auf der Geraden liegen. Mögliche Geradengleichung:

$$\vec{X} = \vec{B} + \lambda \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2 \quad g_a: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ a-4 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_1x_2\text{-Ebene: } x_3 = 0 \Rightarrow 4 + \lambda \cdot 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -4$$

Nur für  $\lambda = -4$  liegt der Geradenpunkt S in der  $x_1x_2$ -Ebene.  
Setze also für  $\lambda = -4$  ein:

$$\vec{S}_a = \begin{pmatrix} 2 - 4 \cdot 2 \\ a - 4 - 4 \cdot (-2) \\ 4 - 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ a + 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Schnittpunkt mit der  $x_3$ -Achse:  $x_1 = 0 \wedge x_2 = 0$

$$x_1 = 0 = 2 + \lambda \cdot 2 \Rightarrow \lambda = -1$$

$$x_2 = 0 = a - 4 + \lambda \cdot (-2) = a - 4 + (-1) \cdot (-2) = a - 2 \Rightarrow a = 2$$

$$\text{Koordinaten } T = \begin{pmatrix} 2 + (-1) \cdot 2 \\ 2 - 4 + (-1) \cdot (-2) \\ 4 + (-1) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

B a) Bestimmung des Normalenvektors:

$$S_1 \vec{S}_2 \times S_1 \vec{S}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0,5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 36 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$E: x_1 + x_2 + 12x_3 + c = 0$$

$S_2(0|0|3)$  muss in der Ebene liegen, damit lässt sich  $c$  bestimmen:

$$0 + 0 + 12 \cdot 3 + c = 0 \Rightarrow c = -36$$

$$E: x_1 + x_2 + 12x_3 - 36 = 0 \checkmark$$

b) Der Inhalt des von den Vektoren  $S_1 \vec{S}_2$  und  $S_1 \vec{S}_3$  aufgespannten Parallelogramms beträgt:

$$|S_1 \vec{S}_2 \times S_1 \vec{S}_3| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0,5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 36 \end{pmatrix} \right| = 3\sqrt{1^2 + 1^2 + 12^2} = 3 \cdot \sqrt{146} \approx 36,2$$

Das Segel entspricht der halben Parallelogrammfläche  $A \approx 18,1 m^2$ .

Es ist also keine Sicherung notwendig.

c)  $S_1 \vec{K}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2,5 \end{pmatrix}$  hat keine  $x_1$ -Komponente. Daher wird auch das Bild von  $S_2$  keinen  $x_1$ -Anteil haben.

d) Der Schatten beginnt bei  $K_1$  und beschattet mehr, als durch die Diagonale  $K_1\bar{K}_3$  abgetrennte Fläche. Das ist mehr als die Hälfte.

e) Dazu muss der Normalenvektor um mindestens  $8^\circ$  gegenüber der Senkrechten abweichen. Berechne also den Zwischenwinkel zwischen  $\vec{n}$  und  $\vec{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ :

$$\cos(\Phi) = \frac{\vec{n} \cdot \vec{z}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{z}|}$$

$$\cos(\Phi) = \frac{1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 12 \cdot 1}{\sqrt{146} \cdot 1} = \frac{12}{\sqrt{146}} \approx 0,993$$

$$\Rightarrow \Phi = 6,72^\circ$$

f) Durchmesser 50cm. Ermittlung von r:

$$25^2 + (r - 5)^2 = r^2 \Rightarrow r = 65$$

$$V = \frac{1}{3} \pi 5^2 \cdot (205 - 5) \approx 5000.$$

Es befinden sich etwa 5 Liter in der Wassertasche.