Abi 18 Lsg Geo I

A 1 Kugel mit Mittelpunkt $M(1|4|0)$ und Radius 6.

a) Der Abstand des Punktes $P(5|1|p)$ muss 6 zum Mittelpunkt betragen:

$$6 = \left|\vec{MP}\right| = \left|\begin{pmatrix} 5-1 \\ 1-4 \\ p-0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4^2 + (-3)^2 + p^2}$$

$36 = 16 + 9 + p^2 \Rightarrow p^2 = 11 \qquad p_{1/2} = \pm\sqrt{11}$

b) Der Verbindungsvektor vom Kugelmittelpunkt zum Punkt B auf der Kugel muss senkrecht auf dem Richtungsvektor der gesuchten Geraden stehen (die Gerade berührt die Kugel, ist also Tangente).

$$\vec{MB} = \vec{B} - \vec{M} = \begin{pmatrix} -3-1 \\ 8-4 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Jeder Vektor, der auf diesem Vektor senkrecht steht kann Richtungsvektor der Geraden sein.

z.B. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, denn $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-4) + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 = 0$

Damit ist ein Richtungsvektor der Geraden festgelegt, als Aufpunkt kann man B verwenden, denn B muss in jedem Fall auf der Geraden liegen. Mögliche Geradengleichung:

$$\vec{X} = \vec{B} + \lambda \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2 $g_a : \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ a-4 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

x_1x_2-Ebene: $x_3 = 0 \Rightarrow 4 + \lambda \cdot 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -4$

Nur für $\lambda = -4$ liegt der Geradenpunkt S in der x_1x_2-Ebene.
Setze also für $\lambda = -4$ ein:

$$\vec{S_a} = \begin{pmatrix} 2-4\cdot 2 \\ a-4-4\cdot(-2) \\ 4-4\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ a+4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Schnittpunkt mit der x_3-Achse: $x_1 = 0 \wedge x_2 = 0$

$x_1 = 0 = 2 + \lambda \cdot 2 \Rightarrow \lambda = -1$

$x_2 = 0 = a - 4 + \lambda \cdot (-2) = a - 4 + (-1) \cdot (-2) = a - 2 \Rightarrow a = 2$

Koordinaten $T = \begin{pmatrix} 2 + (-1) \cdot 2 \\ 2 - 4 + (-1) \cdot (-2) \\ 4 + (-1) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

B a) Bestimmung des Normalenvektors:

$\vec{S_1S_2} \times \vec{S_1S_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0,5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 36 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix}$

$E : x_1 + x_2 + 12x_3 + c = 0$

$S_2(0|0|3)$ muss in der Ebene liegen, damit lässt sich c bestimmen:

$0 + 0 + 12 \cdot 3 + c = 0 \Rightarrow c = -36$

$E : x_1 + x_2 + 12x_3 - 36 = 0 \checkmark$

b) Der Inhalt des von den Vektoren $\vec{S_1S_2}$ und $\vec{S_1S_3}$ aufgespannten Parallelogramms beträgt:

$\left|\vec{S_1S_2} \times \vec{S_1S_3}\right| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0,5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 36 \end{pmatrix} \right\| = 3\sqrt{1^2 + 1^2 + 12^2} = 3 \cdot \sqrt{146} \approx 36,2$

Das Segel entspricht der halben Parallelogrammfläche $A \approx 18,1 m^2$.

Es ist also keine Sicherung notwendig.

c) $\vec{S_1K_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2,5 \end{pmatrix}$ hat keine x_1-Komponente. Daher wird auch das Bild von S_2 keinen x_1-Anteil haben.

d) Der Schatten beginnt bei K_1 und beschattet mehr, als durch die Diagonale $K_1\bar{}K_3$ abgetrennte Fläche. Das ist mehr als die Hälfte.

e) Dazu muss der Normalenvektor um mindestens 8^o gegenüber der Senkrechten abweichen. Berechne also den Zwischenwinkel zwischen $\vec{n}$ und $\vec{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$cos(\Phi) = \frac{\vec{n} \circ \vec{z}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{z}|}$

$cos(\Phi) = \frac{1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 12 \cdot 1}{\sqrt{146} \quad \cdot \quad 1} = \frac{12}{\sqrt{146}} \approx 0,993$

$\Rightarrow \Phi = 6,72^o$

f) Durchmesser 50cm. Ermittling von r:

$25^2 + (r-5)^2 = r^2 \Rightarrow r = 65$

$V = \frac{1}{3}\pi 5^2 \cdot (205 - 5) \approx 5000.$

Es befinden sich etwa 5 Liter in der Wassertasche.