

Abi 19 Lsg Geo II

A 1 $M_1(1|2|3), M_2(-3|-2|1)$

a) $|M_1\vec{M}_2| = \sqrt{(-3-1)^2 + (-2-2)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{16+16+4} = 6 < 2 \cdot 5$

b) Der Mittelpunkt Z liegt in der Mitte der Verbindungsstrecke von M_1 nach M_2 :

$$\vec{Z} = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$|M_1\vec{Z}| = 3 \text{ (siehe Teilaufgabe a)}$$

R ist der Radius der Kugeln, r ist der gesuchte Radius des Schnittkreises, dann gilt:

$$R^2 = 3^2 + r^2 \Rightarrow r = \sqrt{25-9} = 4$$

2 a) $P(p|p|p)$ in die Ebene: $3p + 2p + 2p = 6$

$$7p = 6$$

$$p = \frac{6}{7} \Rightarrow \vec{P} = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} \\ \frac{6}{7} \\ \frac{6}{7} \end{pmatrix}$$

b) Alle Punkte mit drei gleichen Koordinaten befinden sich auf einer Gerade, der "Raumdiagonalen". Es gibt unendlich viele Ebenen, die echt parallel zu einer Geraden verlaufen (diese also nicht enthalten).

B a) Zu zeigen: $\vec{IL} = k \cdot \vec{JK}$ (parallel) und $|\vec{KL}| = |\vec{JI}|$ (gleichschenkelig)

$$\vec{IL} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{JK} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{IL} = 2 \cdot \vec{JK} \checkmark$$

$$|\vec{KL}| = \sqrt{(1-0)^2 + (0-5)^2 + (5-2)^2} \quad |\vec{JI}| = \sqrt{(5-2)^2 + (0-5)^2 + (1-0)^2} \checkmark$$

b) Normalenvektor bestimmen:

$$\vec{JK} \times \vec{JI} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$5x_1 + 4x_2 + 5x_3 + c = 0 \quad \text{L einsetzen: } 5 + 0 + 25 + c = 0 \Rightarrow c = -30$$

$$5x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 30 = 0 \checkmark$$

c) Mittelpunkt der Würfelfläche CDHG: $\vec{M} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{D} + \vec{G}) = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 5 \\ 2,5 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2,5 \\ -10a \cdot \lambda \\ 3,5 + \frac{2}{a} \cdot \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 5 \\ 2,5 \end{pmatrix}$$

Für die x_1 -Koordinate ergibt sich eine wahre Aussage: $2,5 = 2,5$. Man erhält also 2 Gleichungen (für x_2 und x_3) und 2 Unbekannte (λ und a):

$$(I) \lambda \cdot (-10a) = 5$$

$$(II) 3,5 + \lambda \cdot \frac{2}{a} = 2,5$$

$$(I') \lambda = -\frac{5}{10a} = -\frac{1}{2a} \text{ in (II)}$$

$$(II') 3,5 - \frac{1}{2a} \cdot \frac{2}{a} = 2,5 \Rightarrow \frac{1}{a^2} = 1 \Rightarrow a = 1 \quad a = -1 \text{ geht nicht wg. } a \in \mathbb{R}^+$$

d) Diese Ebene beinhaltet alle Punkte deren x_1 -Koordinate 2,5 sind (Parallele zur "Tafelwand"). Die Koordinate des gespiegelten Punktes schaut dann so aus:

$$P'(5 - p_1 | p_2 | p_3).$$

e) Schneide U mit T:

$$T \text{ in PaFo: } \vec{X} = \vec{J} + \lambda \cdot \vec{JK} + \mu \cdot \vec{JI} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ in U:}$$

$$2 - 2\lambda + 3\mu = 2,5 \Rightarrow \lambda = -0,25 + 1,5\mu$$

Gleichung der Schnittgeraden:

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} - 0,25 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 1,5\mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 5 \\ -0,5 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Die Richtungsvektoren der Schnittgerade und von g_a stimmen für $a = 0,5$ überein. Der Aufpunkt von g_a liegt für $\mu = 1$ ebenfalls in der Schnittgeraden, also sind diese Geraden identisch. Nachdem die Schnittgerade den Schnitt von T und der

Spiegelebene U darstellt, stellt sie auch die Schnittgerade von T' und U dar. Also ist es auch die Schnittgerade von T' und T.

- f) Der maximale Abstand der Kantenpunkte ergibt sich bei G. Abstand des Punktes G von der Ebene T:

$$T_{HNF}(X) : \frac{1}{\sqrt{66}}(5x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 30)$$

$$\text{Setze G ein: } T_{HNF}(G) = \frac{1}{\sqrt{66}}(25 + 20 + 25 - 30) = \frac{40}{\sqrt{66}} \approx 13$$

Der minimale Abstand der Kantenpunkte ergibt sich bei F. Abstand des Punktes F von der Ebene T:

$$T_{HNF}(F) = \frac{1}{\sqrt{66}}(25 + 0 + 25 - 30) = \frac{20}{\sqrt{66}} \approx 2,46$$

Alle Kantenpunkte sind mehr als 2 Einheiten von der Pyramidengrundfläche entfernt.