Abi 19 Lsg Geo II

A 1 $M_1(1|2|3), M_2(-3|-2|1)$

a) $\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(-3-1)^2+(-2-2)^2+(1-3)^2} = \sqrt{16+16+4} = 6 < 2\cdot 5$

b) Der Mittelpunkt Z liegt in der Mitte der Verbindungsstrecke von $_M1$ nach M_2:

$\vec{Z} = \frac{1}{2}\cdot\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\-2\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$

$\left|\overrightarrow{M_1Z}\right| = 3$ (siehe Teilaufgabe a)

R ist der Radius der Kugeln, r ist der gesuchte Radius des Schnittkreises, dann gilt:

$R^2 = 3^2 + r^2 \Rightarrow r = \sqrt{25-9} = 4$

2 a) $P(p|p|p)$ in die Ebene: $3p+2p+2p = 6$

$7p = 6$

$p = \frac{6}{7} \Rightarrow \vec{P} = \begin{pmatrix}\frac{6}{7}\\\frac{6}{7}\\\frac{6}{7}\end{pmatrix}$

b) Alle Punkte mit drei gleichen Koordinaten befinden sich auf einer Gerade, der "Raumdiagonalen". Es gibt unendlich viele Ebenen, die echt parallel zu einer Geraden verlaufen (diese also nicht enthalten).

B a) Zu zeigen: $\overrightarrow{IL} = k\cdot\overrightarrow{JK}$ (parallel) und $\left|\overrightarrow{KL}\right| = \left|\overrightarrow{JI}\right|$ (gleichschenklig)

$\overrightarrow{IL} = \begin{pmatrix}-4\\0\\4\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{JK} = \begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{IL} = 2\cdot\overrightarrow{JK}\checkmark$

$\left|\overrightarrow{KL}\right| = \sqrt{(1-0)^2+(0-5)^2+(5-2)^2} \qquad \left|\overrightarrow{JI}\right| = \sqrt{(5-2)^2+(0-5)^2+(1-0)^2}\checkmark$

b) Normalenvektor bestimmen:

$\overrightarrow{JK}\times\overrightarrow{JI} = \begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\-5\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\8\\10\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix}5\\4\\5\end{pmatrix}$

$5x_1+4x_2+5x_3+c = 0 \qquad$ L einsetzen: $5+0+25+c = 0 \Rightarrow c = -30$

$5x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 30 = 0\checkmark$

c) Mittelpunkt der Würfelfläche CDHG: $\vec{M} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{D} + \vec{G}) = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 5 \\ 2,5 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2,5 \\ -10a \cdot \lambda \\ 3,5 + \frac{2}{a} \cdot \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 5 \\ 2,5 \end{pmatrix}$$

Für die x_1-Koordinate ergibt sich eine wahre Aussage: $2,5 = 2,5$. Man erhält also 2 Gleichungen (für x_2 und x_3) und 2 Unbekannte (λ und a):

(I)$\lambda \cdot (-10a) = 5$
(II) $3,5 + \lambda \cdot \frac{2}{a} = 2,5$

(I') $\lambda = -\frac{5}{10a} = -\frac{1}{2a}$ in (II)

(II') $3,5 - \frac{1}{2a} \cdot \frac{2}{a} = 2,5 \Rightarrow \frac{1}{a^2} = 1 \Rightarrow a = 1$ a=-1 geht nicht wg.$a \in \mathbb{R}^+$

d) Diese Ebene beinhaltet alle Punkte deren x_1-Koordinate 2,5 sind (Parallele zur "Tafelwand"). Die Koordinate des gespiegelten Punktes schaut dann so aus:

$P'(5 - p_1|p_2|p3)$.

e) Schneide U mit T:

T in PaFo: $\vec{X} = \vec{J} + \lambda \cdot \vec{JK} + \mu \cdot \vec{JI} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ in U:

$2 - 2\lambda + 3\mu = 2,5 \Rightarrow \lambda = -0,25 + 1,5\mu$

Gleichung der Schnittgeraden:

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} - 0,25 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 1,5\mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\vec{X} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 5 \\ -0,5 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Die Richtungsvektoren der Schnittgerade und von g_a stimmen für a = 0,5 überein. Der Aufpunkt von g_A liegt für $\mu = 1$ ebenfalls in der Schnittgeraden, also sind diese Geraden identisch. Nachdem die Schnittgerade den Schnitt von T und der

Spiegelebene U darstellt, stellt sie auch die Schnittgerade von T' und U dar. Also ist es auch die Schnittgerade von T' und T.

f) Der maximale Abstand der Kantenpunkte ergibt sich bei G. Abstand des Punktes G von der Ebene T:

$T_{HNF}(X): \frac{1}{\sqrt{66}}(5x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 30)$

Setze G ein: $T_{HNF}(G) = \frac{1}{\sqrt{66}}(25 + 20 + 25 - 30) = \frac{40}{\sqrt{66}} \approx 13$

Der minimale Abstand der Kantenpunkte ergibt sich bei F. Abstand des Punktes F von der Ebene T:

$T_{HNF}(F) = \frac{1}{\sqrt{66}}(25 + 0 + 25 - 30) = \frac{20}{\sqrt{66}} \approx 2,46$

Alle Kantenpunkte sind mehr als 2 Einheiten von der Pyramidengrundfläche entfernt.