Abi 03 Lsg Geo I

$A(1|-3|-3)$ $\qquad B(2|1|-2)$ $\qquad D(5|-5|1)$

$$g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad h: \vec{X} = \vec{D} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

1. a) Die Richtungsvektoren der beiden Geraden sind nicht linear abhängig, d. h. sie spannen bereits eine Ebene auf; deshalb kann man den Normalenvektor der gesuchten Ebene aus dem Kreuzprodukt dieser beiden Vektoren bestimmen:

   $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ Die Ebenengleichung ist also soweit festgelegt:

   $H: x_1 - 2x_2 - 2x_3 + c = 0$

   A muss in der Ebene liegen:

   $1 + 6 + 6 + c = 0 \Rightarrow c = -13\checkmark$

   b) Die Verbindungslinie von C zum Fußpunkt muss senkrecht auf dem Richtungsvektor der Geraden stehen:

   $[\vec{X} - \vec{P}] \circ \vec{u} = 0$

   $$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$
   $$\left[\begin{pmatrix} 2\lambda - 1 \\ 2\lambda - 4 \\ -\lambda - 1 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$
   $4\lambda - 2 + 4\lambda - 8 + \lambda + 1 = 0$

   $9\lambda - 9 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$

   $$\vec{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}\checkmark$$
   Zu zeigen, dass $BC \perp H$:

$\vec{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \vec{n}_H$

c) $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{n}_H = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

A einsetzen: $2 \cdot 1 - 1 \cdot (-3) + 2 \cdot (-3) + 1 = 2 + 3 - 6 + 1 = 0\checkmark$

B einsetzen: $2 \cdot 2 - 1 + 2 \cdot (-2) + 1 = 4 - 1 - 4 + 1 = 0\checkmark$

C einsetzen: $2 \cdot 3 - 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-4) + 1 = 6 + 1 - 8 + 1 = 0\checkmark$

2. a) $\vec{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = k \cdot \vec{n}_{E1}$

$\vec{AD}$ ist also linear abhängig zum Normalenvektor, steht also senkrecht auf E_1.

Für die weiteren Koordinaten ist jeweils $\vec{AD}$ an die Punkte B und C anzusetzen:

$\vec{E} = \vec{B} + \vec{AD} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\vec{F} = \vec{C} + \vec{AD} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) Die Deckfläche muss parallel zur Grundfläche verlaufen, also besitzt sie den gleichen Normalenvektor. Außerdem muss sie den Punkt D enthalten:

$2 \cdot 5 - (-5) + 2 \cdot 1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -17$

c) $\left|\vec{CA}\right| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3$

$\left|\vec{CB}\right| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3$

$V = G \cdot h$ Da A auf der Geraden g liegt und C der Fußpunkt des Lotes von B auf diese Gerade, ergibt sich mit ABC ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck. Daher gilt:

$G = \frac{1}{2}\left|\vec{CA}\right| \cdot \left|\vec{CB}\right| = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = 4,5$

$h = \left|\vec{AD}\right| = \sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2} = 6$

$\Rightarrow V = 4,5 \cdot 6 = 27$

d) Einer der Teilkörper ist die Pyramide ABCF. Diese Pyramide besitzt die gleiche Grundfläche ABC und die gleiche Höhe $|AD|$ wie das Prisma. Sein Volumen entspricht daher einem Drittel des Prismas: $V = \frac{1}{3}V_P = 9$

Daher verhalten sich die Volumina der Teilkörper 1:2.

e) Erste Möglichkeit: Halbierung auf halber Höhe.

Ein Punkt dieser Ebene wäre $\vec{M} = \frac{1}{2}\left(\vec{A} + \vec{D}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$

Die passende Ebene E_3 ist ebenfalls parallel zu E_1 und E_2, daher muss c_3 durch Einsatz von M bestimmt werden:

$2 \cdot 3 - (-4) + 2 \cdot (-1) + c_3 = 0 \Rightarrow c_3 = -8$

$E_3 : 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 8 = 0$

Zweite Möglichkeit: die Symmetrieebene des Prismas

(geht durch C und F und steht senkrecht auf AB und DE und halbiert diese Strecken).

$\vec{AB} = \vec{n}_{E4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad E_4 : x_1 + 4x_2 + x_3 + c_4 = 0$

Bestimmung von c_4 durch den Punkt C:

$3 - 4 - 4 + c_4 = 0 \Rightarrow c_4 = 5 \Rightarrow E_4 : x_1 + 4x_2 + x_3 + 5 = 0$