

## Abi 03 Lsg Geo I

$$A(1|-3|-3) \quad B(2|1|-2) \quad D(5|-5|1)$$

$$g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad h: \vec{X} = \vec{D} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

1. a) Die Richtungsvektoren der beiden Geraden sind nicht linear abhängig, d. h. sie spannen bereits eine Ebene auf; deshalb kann man den Normalenvektor der gesuchten Ebene aus dem Kreuzprodukt dieser beiden Vektoren bestimmen:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ Die Ebenengleichung ist also soweit festgelegt:}$$

$$H: x_1 - 2x_2 - 2x_3 + c = 0$$

A muss in der Ebene liegen:

$$1 + 6 + 6 + c = 0 \Rightarrow c = -13 \checkmark$$

- b) Die Verbindungslinie von C zum Fußpunkt muss senkrecht auf dem Richtungsvektor der Geraden stehen:

$$[\vec{X} - \vec{P}] \circ \vec{u} = 0$$

$$\left[ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right] \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\left[ \begin{pmatrix} 2\lambda - 1 \\ 2\lambda - 4 \\ -\lambda - 1 \end{pmatrix} \right] \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$4\lambda - 2 + 4\lambda - 8 + \lambda + 1 = 0$$

$$9\lambda - 9 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

$$\vec{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \checkmark$$

Zu zeigen, dass  $BC \perp H$ :

$$\vec{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \vec{n}_H$$

$$c) \vec{n}_E = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{n}_H = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$A \text{ einsetzen: } 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-3) + 2 \cdot (-3) + 1 = 2 + 3 - 6 + 1 = 0 \checkmark$$

$$B \text{ einsetzen: } 2 \cdot 2 - 1 + 2 \cdot (-2) + 1 = 4 - 1 - 4 + 1 = 0 \checkmark$$

$$C \text{ einsetzen: } 2 \cdot 3 - 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-4) + 1 = 6 + 1 - 8 + 1 = 0 \checkmark$$

$$2. \ a) \vec{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = k \cdot \vec{n}_{E1}$$

$\vec{AD}$  ist also linear abhängig zum Normalenvektor, steht also senkrecht auf  $E_1$ .

Für die weiteren Koordinaten ist jeweils  $\vec{AD}$  an die Punkte B und C anzusetzen:

$$\vec{E} = \vec{B} + \vec{AD} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F} = \vec{C} + \vec{AD} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Die Deckfläche muss parallel zur Grundfläche verlaufen, also besitzt sie den gleichen Normalenvektor. Außerdem muss sie den Punkt D enthalten:

$$2 \cdot 5 - (-5) + 2 \cdot 1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -17$$

$$c) |\vec{CA}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3$$

$$|\vec{CB}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3$$

$V = G \cdot h$  Da A auf der Geraden g liegt und C der Fußpunkt des Lotes von B auf diese Gerade, ergibt sich mit ABC ein gleichschenkelig rechtwinkliges Dreieck. Daher gilt:

$$G = \frac{1}{2} |\vec{CA}| \cdot |\vec{CB}| = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = 4,5$$

$$h = |\vec{AD}| = \sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2} = 6$$

$$\Rightarrow V = 4,5 \cdot 6 = 27$$

- d) Einer der Teilkörper ist die Pyramide ABCF. Diese Pyramide besitzt die gleiche Grundfläche ABC und die gleiche Höhe  $|AD|$  wie das Prisma. Sein Volumen entspricht daher einem Drittel des Prismas:  $V = \frac{1}{3} V_P = 9$

Daher verhalten sich die Volumina der Teilkörper 1:2.

- e) Erste Möglichkeit: Halbierung auf halber Höhe.

$$\text{Ein Punkt dieser Ebene wäre } \vec{M} = \frac{1}{2} (\vec{A} + \vec{D}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Die passende Ebene  $E_3$  ist ebenfalls parallel zu  $E_1$  und  $E_2$ , daher muss  $c_3$  durch Einsatz von M bestimmt werden:

$$2 \cdot 3 - (-4) + 2 \cdot (-1) + c_3 = 0 \Rightarrow c_3 = -8$$

$$E_3 : 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 8 = 0$$

Zweite Möglichkeit: die Symmetrieebene des Prismas

(geht durch C und F und steht senkrecht auf AB und DE und halbiert diese Strecken).

$$\vec{AB} = \vec{n}_{E_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad E_4 : x_1 + 4x_2 + x_3 + c_4 = 0$$

Bestimmung von  $c_4$  durch den Punkt C:

$$3 - 4 - 4 + c_4 = 0 \Rightarrow c_4 = 5 \Rightarrow E_4 : x_1 + 4x_2 + x_3 + 5 = 0$$