Abi 00 Lsg Geo II

$\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{B} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \vec{H} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$

1. a) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \vec{AH} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$

   $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 14 \end{pmatrix}$

   $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

   A einsetzen: $1 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) + c = 0 \Rightarrow c = -3$

   $T : x_1 - x_2 - 3 = 0$

   b) Füge $\vec{AH}$ an den Ortsvektor von B an:

   $\vec{G} = \vec{B} + \vec{AH} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

2. a) $\overline{BG} = \left|\vec{BG}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{72} = 6 \cdot \sqrt{2}$

   Bei dem Viereck BCHF handelt es sich um eine Quadrat. Also sind die Diagonalen gleichlang. Die Ebene T geht durch B und G hindurch, also hat das Lot von C auf T den Diagonalenschnittpunkt M als Fußpunkt. Der Abstand von C zu M entspricht also der halben Diagonalenlänge.

   $d = \frac{1}{2} 6\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

   b) Aufpunkt: $\vec{M} = \frac{1}{2}\left(\vec{B} + \vec{G}\right) = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

   Richtungsvektor: Die Gerade steht senkrecht auf T, also kann man den Normalenvektor verwenden:

Geradengleichung: $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) Der Normalenvektor muss so verlängert werden, dass er die Länge $3\sqrt{2}$ hat:

$\left| \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = 3\sqrt{2}$

$\sqrt{\lambda^2 1^2 + \lambda^2(-1)^2 + 0^2} = 3\sqrt{2}$

$\pm\lambda\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \Rightarrow \lambda = \pm 3$

$\Rightarrow \vec{C} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{F} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

d) $\vec{D} = \vec{C} + \vec{BA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{E} = \vec{F} + \vec{BA} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

3. a) Im Aufriss verbindet eine Oktaederkante z.B. den Mittelpunkt der unteren Seite mit dem Mittelpunkt der rechten Seite und ist somit parallel zur Diagonalen der hinteren Seite. Mit Hilfe des Strahlensatzes gilt:

$\frac{a}{2} : a = k : d \Rightarrow k = \frac{1}{2}d$

b) Koordinaten des Oktaedermittelpunktes: $\vec{O} = \frac{1}{2}\left(\vec{B} + \vec{H}\right) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

HNF der Ebene: $U: \frac{1}{\sqrt{3}}(x_1 + x_2 + x_3 - 7)$

Punkt einsetzen: $d = \frac{1}{\sqrt{3}}(5 + 2 + 3 - 7) = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

c) Der Radius der Inkugel muss $\sqrt{3}$ betragen. Also gilt:

$(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_3 - 3)^2 = 3$

d) $V_{Kugel} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi 3\sqrt{3} = 4\pi\sqrt{3}$

$V_{Oktaeder} = 8 \cdot V_{Pyramide} = 8 \cdot \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = 8 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 = 8 \cdot 9$