

## Abi 19 Lsg Ana I

A 1  $f'(x) = \frac{2e^{2x} \cdot x - 1 \cdot e^{2x}}{x^2} = \frac{e^{2x} \cdot (2x - 1)}{x^2}$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \underbrace{e^{2x} \cdot (2x - 1)}_{>0} = 0$$

$f'(x) = 0$ , wenn  $2x - 1 = 0$ , also  $x = \frac{1}{2}$ .

VZT	$x < 0$	$0 < x < \frac{1}{2}$	$x = \frac{1}{2}$	$x > \frac{1}{2}$
$f'(x)$	-	-	0	+
$G_f$	$\searrow$	$\searrow$	TIP	$\nearrow$

2 a) Schnittpunkte:

$$1 - \frac{1}{x^2} = -3 \\ -\frac{1}{x^2} = -4 \mid \text{Kehrbruch}$$

$$x^2 = \frac{1}{4} \mid \text{radizieren}$$

$$x_{1/2} = \pm \frac{1}{2}$$

b)  $A = 2 \cdot \left( \left| (-3) \cdot \frac{1}{2} \right| + \left| \int_{\frac{1}{2}}^1 1 - \frac{1}{x^2} dx \right| \right) = 2 \cdot \left( \frac{3}{2} + \left| \int_{\frac{1}{2}}^1 1 - x^{-2} dx \right| \right)$   
 $= 2 \cdot \left( \frac{3}{2} + \left| \left[ x + x^{-1} \right]_{\frac{1}{2}}^1 \right| \right) = 2 \cdot \left( \frac{3}{2} + |2 - 2,5| \right) = 2 \cdot 2 = 4$

3 a) Es handelt sich um Graph I

Graph II kann es nicht sein, da seine Nullstellen nicht mit den Extremstellen von  $G_f$  übereinstimmen.

Graph III kann es nicht sein, da der Steigungswert von  $G_f$  bei  $x = 0$  einen Betrag hat der kleiner als eins ist. Graph III gibt jedoch bei  $x=0$  einen Betrag von 2 für die Steigung an.

b)  $G_F$  ist im Intervall  $[1;3]$  stetig monoton fallend, da die Funktionswerte von  $f$  in diesem Intervall alle negativ sind.

4  $k = \pi$ . Dort hat der Graph von  $\cos(x)$  eine waagerechte Tangente und ein Maximum. Für jedes  $k > \pi$  besitzt der Graph zu zwei unterschiedlichen  $x$ -Werten einen gleichen  $y$ -Wert und ist demzufolge nicht mehr umkehrbar.

$$f(x) = e^x + 1 \text{ oder } g(x) = x + 1 \text{ oder } h(x) = x - 1 \dots$$

a)  $x - 1 > 0$

$$x > 1$$

$$\text{also } D_f = ]1; \infty[ \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} 2 - \underbrace{\ln(x-1)}_{\substack{\rightarrow -\infty \\ \rightarrow +\infty}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2 - \underbrace{\ln(x-1)}_{\substack{\rightarrow \infty \\ \rightarrow -\infty}} = -\infty$$

$$\text{b) } 2 - \ln(x-1) = 0 \quad | \quad + \ln(x-1)$$

$$2 = \ln(x-1) \quad | \quad e^()$$

$$e^2 = x-1 \quad | \quad +1$$

$$e^2 + 1 = x$$

- c) Der Graph wird um 1 in positiver x-Richtung verschoben, an der x-Achse gespiegelt und dann um 2 in positiver y-Richtung verschoben. Durch die Spiegelung an der x-Achse ergibt sich ein streng monoton fallender Graph, da die Grundfunktion streng monoton steigend ist und Verschiebungen keinen Einfluss auf die Monotonie haben.

$$\text{d) } F'(x) = 3 - 1 \cdot \ln(x-1) - (x-1) \cdot \frac{1}{x-1} = 3 - \ln(x-1) - 1 = 2 - \ln(x-1) \checkmark$$

Alle Stammfunktionen:  $F_c(x) = 3x - (x-1) \cdot \ln(x-1) + c$

$$F_c(2) = 0$$

$$3 \cdot 2 - (2-1) \cdot \ln(2-1) + c = 0$$

$$6 - 1 \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow c = -6$$

$$F_6(x) = 3x - (x-1) \cdot \ln(x-1) - 6$$

- 2 a)  $f(2)$  beschreibt diejenige Linie im Raum, an der es vom waagerechten Plateau aus wieder abwärts geht.

Da es sich um eine symmetrische Spiegelung an der  $y$ -Achse handelt, muss  $x$  durch  $-x$  ersetzt werden:

$$q(x) = 2 - \ln(-x - 1)$$

- b) Mittlere Änderungsrate in diesem Intervall:

$$m(x) = \frac{f(8) - f(2)}{6} = \frac{2 - \ln(7) - 0}{6} = \frac{2 - \ln(7)}{6} \approx -0,32432$$

$$\text{Ableitungsfunktion: } f'(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$f'(x) = \frac{2 - \ln(7)}{6} \Rightarrow 1 - x = \frac{6}{2 - \ln(7)} \Rightarrow x = 1 + \frac{6}{\ln(7)} \approx 4,1$$

- c) Die Punkte  $(2|f(2))$  und  $(8|f(8))$  durch eine Gerade verbinden. Diese parallel verschieben bis sie den Graphen berührt. Die  $x$ -Koordinate des Berührpunktes bestimmen.

$$d) f'(2) = \frac{1}{1-2} = -1$$

Der Winkel beträgt also  $135^\circ$ .

$$e) A = 2 \cdot |(F(6) - F(2))| = 2 \cdot 3,9528 \approx 8$$

Es stehen etwa 8 Quadratmeter zur Verfügung

- 3 a) 1. Fall  $k < 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} kx^3 + (k+1)x^2 + 9x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} kx^3 + (k+1)x^2 + 9x = -\infty$$

(Die höchste Potenz entscheidet und hat mit  $k < 0$  einen negativen Koeffizienten - Spiegelung an der  $x$ -Achse)

2. Fall  $k > 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} kx^3 + (k+1)x^2 + 9x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} kx^3 + (k+1)x^2 + 9x = +\infty$$

(Die höchste Potenz entscheidet und hat mit  $k > 0$  einen positiven Koeffizienten)

b)  $f'(x) = 3kx^2 + 6(k+1)x + 9$

$$f''(x) = 6kx + 6(k+1)$$

Ein Wendepunkt befindet sich an Stellen mit Krümmung 0:

$$0 = 6kx + 6(k+1)$$

$$0 = kx + k + 1$$

$$-kx = k + 1$$

$$x_W = -\frac{k+1}{k} = -1 - \frac{1}{k}$$

- c) "Wendepunkt auf der y-Achse" bedeutet, dass die x-Koordinate des Wendepunktes 0 sein muss.

$$x_W = 0 = -1 - \frac{1}{k} \Rightarrow \frac{1}{k} = -1 \Rightarrow k = -1$$

Für  $k = -1$  liegt der Wendepunkt genau auf der y-Achse. Diese Funktion schaut dann so aus:

$$f_{-1}(x) = -x^3 + (-1+1)x^2 + 9x = -x^3 + 9x$$

$$f_{-1}(0) = -0^3 + 9 \cdot 0 = 0 \checkmark$$

Steigung der Tangente am Wendepunkt (der war ja bei  $x=0$ ):

$$f'_{-1}(x) = -3x^2 + 9$$

$$f'_{-1}(0) = 9 \checkmark$$

- d) Die dargestellte Steigung zeigt 3 Kästchen in der Höhe auf eines in x-Richtung. Dies soll der Steigung 9 entsprechen. Also gehören im Quadrat drei Höheneinheiten zu einer Rechtseinheit. Somit müssen die "Lücken" mit den Zahlen 3; 6; 9; 12 und so weiter gefüllt werden.